



# ВЕСТНИК

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ОБЩЕСТВЕННО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ НОМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

азом, ...  
 цикла второго ...  
 3.2. Пусть для системы ...  
 периодическая функция,  $\gamma > 0$ ,  $\varphi(\sigma) = \dots$   
 $\sigma_2 = \frac{\Delta}{2} - \sigma_1$ ,  $\dot{\varphi}(\sigma_1) > 0$ ,  $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$ ,  $\beta = \lambda\beta_2$ ,  $\Psi_1(\varepsilon, \sigma) = \dots$   
 $(b\beta_2 - 1) - \sqrt{b\beta_2(b\beta_2 - 4)}^{1/2}$ ,  
 $\sigma) = -\lambda\Psi_1(\varepsilon, \sigma) - \frac{2b\beta_2\lambda\Psi_1(\varepsilon, \sigma)}{1 + \beta_2^2\lambda^2\Psi_1^2(\varepsilon, \sigma)} + \gamma - \frac{1}{\varepsilon^2}g(\sigma) \int_0^\sigma g(\xi)d\xi < 0$ ,  $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2] \cup \dots$  (3.10);  
 $\cup [\varepsilon_3; +\infty)$ ,  $\Psi(\varepsilon, \sigma) > 0$ ,  $\varepsilon \in [\varepsilon_4; \varepsilon_5] \subset [\varepsilon_2; \varepsilon_3]$ ,  $\Psi_1(\varepsilon_2, \sigma) > 0$ ,  $\sigma \in (+\infty; -\infty)$ , (3.11);  
 существуют  $a > 0$ ,  $k$  такие, что  $f_1(\sigma) = -a\sigma^2 + k\sigma + \tau_1$ ,  $f_2(\sigma) = \left(2 \int_\sigma^{\sigma_2} \varphi(\xi)d\xi\right)^{1/2}$ .  
 $f_1(\sigma^*) = f_2(\sigma^*)$ ,  $\sigma^* \in (0, \sigma_2)$ ,  
 $\left. \begin{aligned} &g(\sigma) \left( 1 + \frac{2b\beta_2}{1 + \lambda^2\beta_2^2 f_1^2(\sigma)} \right) - g(\sigma) + \gamma + 2a\sigma f_1(\sigma) - k < 0, \sigma \in [0; \sigma^*] \end{aligned} \right\}$  (3.11)  
 существуют два предельных цикла второго рода, мно...  
 является областью притяжения сист...  
 системы (3.3) выполнены условия:  
 $\Psi(\varepsilon, \sigma) < 0$ ,  $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2] \cup [\varepsilon_3; +\infty)$ ,  $\sigma \in (+\infty; -\infty)$ ,  
 $\varepsilon \in [\varepsilon_4; \varepsilon_5] \cup [\varepsilon_6; \varepsilon_7]$ ,  $[\varepsilon_4; \varepsilon_5] \subset [\varepsilon_2; \varepsilon_3]$ ,  $[\varepsilon_6; \varepsilon_7] \subset [0; \varepsilon_1]$ ,  $\Psi_1(\varepsilon_7$   
 $\sigma \in (+\infty; -\infty)$ ,  
 системы (3.3) существуют три предельных цикла второго рода.  
 значение  $\alpha$  системы (1.18), при котором существ...  
 тию  $F_0(\sigma) \geq 0$ ,  $F_0(\sigma_2) = 0$  и для системы (3...  
 $(\alpha + \gamma)^2 (\alpha_{np})^2 - 2b\lambda\beta_2 < 0$ .  
 том.

Издается с 2001 г.  
Выходит 4 раза в годРЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯГлавный редактор  
**АЛЕКСЕЕВ А.С.**Заместитель главного редактора –  
**Глазко В.И.**  
**Горбачев В.В.**Ответственный секретарь –  
**Поротникова М.В.**

**АЛЕКСЕЕВ В.Н.**  
**Антонов А.В.**  
**Аренс В.Ж.** (США)  
**Батлер Р.**  
**Бурак П.И.**  
**Волков Ю.Г.**  
**Грибов Л.А.**  
**Епифанцев С.Н.**  
**Жданов М.С.** (США)  
**Золотарев В.А.**  
**Иваницкая Л.В.**  
**Казарян С.Б.** (США)  
**Магомедов Ш.М.**  
**Панин А.Н.**  
**Письменский Г.И.**  
**Савельев В.Н.**  
**Смирнов А.И.**  
**Терехин М.Т.**  
**Утямышев И.Р.**  
**Хачатрян К.Г.** (США)  
**Чень Цзяньпин** (Китай)  
**Черешкин Д.С.**  
**Чжао Пенда** (Китай)  
**Шахвердиев А.Х.**  
**Шевченко Ю.А.**  
**Яннакопулос П.** (Греция)

РЕДАКЦИОННЫЙ  
СОВЕТПредседатель –  
**Кузнецов О.А.**

**Гейхман И.А.**  
**Кервалишвили П.Д.** (Грузия)  
**Козловский Е.А.**  
**Мелуа А.И.**  
**Никитин А.Н.**  
**Новиков В.С.**  
**Рахманин Ю.А.**  
**Степашин С.В.**  
**Тыминский В.Г.** (ФРГ)  
**Фурсей Г.Н.**  
**Чилингар Дж.** (США)

Зав. редакцией –  
**АЛЕКСЕЕВ П.А.**Журнал зарегистрирован в Министерстве  
по делам печати, телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций РФ.  
Рег. свид. ПИ № 77-11708Все права защищены. Никакая часть этого издания  
не может быть воспроизведена в какой-либо форме  
без письменного разрешения издателя.  
Редакция не несет ответственности за содержание  
рекламных материалов.  
© РАЕН 2018 г.119002, Москва,  
пер. Сивцев Вражек, 29/16  
тел./факс (495) 954-7305

# Содержание

Тематический номер «Дифференциальные уравнения»

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНОЙ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ  
**В.В. Абрамов** .....3О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ  
РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ СОВЕРШЕННЫХ ИНДЕКСОВ  
**С.И. Агарков**.....8ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СЕМЕЙСТВА  
КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. II  
**А.Ф. Андреев,**  
**И.А. Андреева** .....11МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
СТАБИЛЬНОЙ РАБОТЫ СТРУКТУРНОГО  
ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ НА ПРЕДПРИЯТИИ  
**С.А. Бельман**.....16ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
С БЕСКОНЕЧНОЙ РЕШЕТКОЙ  
СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ  
**И.М. Буркин** .....19ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА,  
ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ  
ПАРАШЮТИСТА  
**И.Ю. Клочкова,**  
**Д.Г. Мельников**.....24ГЛАДКОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО  
ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ  
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА  
**А.Н. Конёнков**.....27МЕТОД ПРЕОБРАЗУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ  
**М.И. Купцов,**  
**С.Л. Яблочников,**  
**И.М. Купцов** .....31МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЛОГИСТИКИ СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ  
**А.В. Лебедев,**  
**С.В. Видов,**  
**М.С. Маскина**.....36ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ  
РАВНОВЕСИЯ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
СОЦИАЛЬНО-ПОЛИТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ  
КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ  
**Е.Ю. Лискина**.....40КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ  
ЦИКЛЫ ФАЗОВОЙ СИСТЕМЫ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
**С.С. Мамонов,**  
**А.О. Харламова,**  
**И.В. Ионова**.....51ТЕОРЕМА БОЛЯ – ПЕРРОНА  
ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ  
ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ  
С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ  
**П.М. Симонов**.....58ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ  
МНОГОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА  
(ИГРОВОЙ ПОДХОД)  
**М.Т. Терёхин**.....65

# Contents

## Special issue «Differential equations»

CONDITIONS OF EXISTENCE OF THE PERIODIC SOLUTION OF THE SECOND ORDER OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SQUARE NONLINEAR PART <b>V.V. Abramov</b> .....	3
ON THE POSSIBILITY OF CONSTRUCTING SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PERFECT INDEXES <b>S.I. Agarkov</b> .....	8
PHASE PORTRAITS OF FAMILY OF CUBIC SYSTEMS IN A POINCARÉ CIRCLE. II <b>A.F. Andreev, I.A. Andreeva</b> .....	11
MATHEMATICAL MODEL OF STABLE OPERATION OF A DEPARTMENT IN THE COMPANY <b>S.A. Belman</b> .....	16
DYNAMICAL SYSTEMS WITH AN INFINITE LATTICE OF HIDDEN ATTRACTORS <b>I.M. Burkin</b> .....	19
DYNAMIC SYSTEM, DESCRIBING MOVEMENT OF THE PARACHUTIST <b>I.U. Klochkova, D.G. Melnikov</b> .....	24
SMOOTHNESS OF THE MODIFIED SIMPLE LAYER POTENTIAL FOR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER <b>A.N. Konenkov</b> .....	27
THE METHOD OF TRANSFORMING MATRIX FOR THE EVIDENCE OF INTEGRAL MANIFOLDS' EXISTENCE <b>M.I. Kuptsov, S.L. Yablochnikov, I.M. Kuptsov</b> .....	31
MATHEMATICAL MODELLING OF LOGISTICS OF SOCIAL SYSTEM <b>A.V. Lebedev, S.V. Vidov, M.S. Maskina</b> .....	36
THE STUDY OF EQUILIBRIUM STATES OF DYNAMIC MODELS OF SOCIO-POLITICAL CONTROL IN SOME CRITICAL CASES <b>E.Y. Liskina</b> .....	40

VIBRATIONAL-REVOLUTION CYCLES PHASE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS <b>S.S. Mamonov, A.O. Kharlamova, I.V. Ionova</b> .....	51
THEOREM OF BOHL – PERRON ON ASYMPTOTIC PERIODIC SOLUTIONS FOR HYBRID LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT <b>P.M. Simonov</b> .....	58
INVESTIGATION A MATHEMATICAL MODEL OF THE DEVELOPMENT OF DIVER-SITIED ECONOMIC SYSTEM IN CONDITIONS OF CONFLICT (GAMED ACCESS) <b>M.T. Teryokhin</b> .....	65



SCIENTIFIC & PUBLIC JOURNAL

# BULLETIN

OF RUSSIAN  
ACADEMY  
OF NATURAL  
SCIENCES

Published since 2001  
4 issues per year

## EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief –  
**A.S. ALEKSEEV**

Deputy Editor-in-Chief –  
**V.I. GLAZKO**  
**V.V. GORBACHEV**

Executive Secretary –  
**M.V. POROTNIKOVA**

**V.N. ALEKSEEV**  
**A.V. ANTONOV**  
**V.ZH. ARENS** (USA)  
**R. BUTLER** (USA)  
**P.I. BURAK**  
**Y.G. VOLKOV**  
**L.A. GRIBOV**  
**S.N. EPIFANTSEV**  
**M.S. ZHDANOV** (USA)  
**V.A. ZOLOTAREV**  
**L.V. IVANITSKAYA**  
**S.B. KAZARIAN** (USA)  
**SH.M. MAGOMEDOV**  
**A.N. PANIN**  
**G.I. PISMENSKY**  
**V.N. SAVELYEV**  
**A.I. SMIRNOV**  
**M.T. TEREHIN**  
**I.R. UTJAMYSHEV**  
**K.G. KHACHATRYAN** (USA)  
**CHEN JIANPING** (CHINA)  
**D.S. CHERESHKIN**  
**ZHAO PENGDA** (CHINA)  
**A.H. SHAHVERDIEV**  
**YU.L. SHEVCHENKO**  
**P. YANNAKOPOULOS** (GREECE)

## EDITORIAL COUNCIL

Chairman –  
**O.L. KUZNETSOV**

**I.L. GEYKHMAN**  
**P.D. KERVALISHVILI** (GEORGIA)  
**E.A. KOZLOVSKY**  
**A.I. MELUA**  
**A.N. NIKITIN**  
**V.S. NOVIKOV**  
**YU.A. RAKHMANIN**  
**C.V. STEPASHIN**  
**V.G. TYMINSKY** (GERMANY)  
**G.N. FURSEY**  
**J. CHILINGAR** (USA)

Editorial Director –  
**P.A. ALEKSEEV**

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced in any form or by any means without permission in writing from the publisher.

© RANS 2018

iSSN 1682-1696

Editorial Board Address  
29/16, Sivoev Vrazhek, 119002,  
Moscow, Russia, tel./fax +7 (495) 954-7305

УДК 517.925

## УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

В.В. Абрамов

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

### CONDITIONS OF EXISTENCE OF THE PERIODIC SOLUTION OF THE SECOND ORDER OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SQUARE NONLINEAR PART

V.V. Abramov

Исследуется нелинейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами при наличии периодического неоднородного слагаемого. Используются свойства изоклин соответствующей системы. Построена прямоугольная положительно инвариантная область. Получены достаточные коэффициентные условия существования и асимптотической устойчивости периодического решения.

*Ключевые слова:* дифференциальное уравнение, периодическое решение, устойчивость, нелинейный осциллятор.

We investigate a second-order nonlinear equation with constant coefficients in the presence of a periodic inhomogeneous term. The properties of the isoclines of the corresponding system are used. A rectangular positively invariant domain is constructed. Sufficient coefficient conditions for the existence and asymptotic stability of the periodic solution are obtained.

*Keywords:* differential equation, periodic solution, stability, nonlinear oscillator.

Пусть дано уравнение вида

$$\ddot{x} + ax + b\dot{x} + c(t) + \alpha x^2 + \beta x\dot{x} + \gamma(\dot{x})^2 = 0, \quad (1)$$

в котором  $a, b, \alpha, \beta, \gamma - const$ ,  $c(t)$  – ограниченная  $T$ -периодическая функция.

**Задача.** Определить коэффициентные условия существования устойчивого  $T$ -периодического решения уравнения (1).

Уравнение (1) относится к классу обобщенных уравнений Рэлея. Результаты исследований по проблеме существования периодических решений уравнений типа Льенара, Рэлея и их обобщений изложены в книге [1]. Локальный результат при наличии кубической нелинейности получен в работе [2]. В данной работе для решения поставленной задачи применим метод канонических областей, основанный на следующем утверждении.

**Теорема 1** [3]. Пусть система  $\dot{x} = f(t, x)$  с  $T$ -периодической по  $t$  правой частью обладает свойством существования и единственности решения на множестве  $R \times D$ . Если существует выпуклый компакт  $\Omega \subset D$ , для которого на границе  $\partial\Omega$ , заданной равенствами  $\Phi_i(x) = 0$ , где  $\Phi_i(x)$  непрерывно дифференцируемые функции, выполняются условия  $(grad \Phi_i(x), f(t, x)) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то рассматриваемая система имеет  $T$ -периодическое решение с начальным значением в  $\text{int } \Omega$ .

Сведем уравнение (1) к эквивалентной нормальной системе. Допустим,  $\dot{x} = kx - y$ , где  $k$  – некоторое число. Тогда  $\ddot{x} = k\dot{x} - \dot{y}$ . Подставим  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  в уравнение (1) и получим соотношение  $k^2x - ky - \dot{y} + ax + b(kx - y) + c(t) + \alpha x^2 + \beta kx^2 - \beta xy + \gamma k^2x^2 + \gamma y^2 - 2\gamma kxy = 0$ , из которого выразим  $\dot{y} = x^2(\alpha + \beta k + \gamma k^2) + y^2\gamma + x(a + bk + k^2) - xy(\beta + 2\gamma k) - y(k + b) + c(t)$ . Всюду далее будем предполагать, что выполняется равенство

$$\beta + 2\gamma k = 0.$$

Итак, уравнению (1) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) = kx - y, \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) = x^2(\alpha - \gamma k^2) + \gamma y^2 + \\ + x(a + bk + k^2) - y(k + b) + c(t). \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы решить задачу по теореме 1, будем искать для системы (2) положительно инвариантный выпуклый компакт  $\Omega$  на фазовой плоскости  $xOy$ .

Установим необходимые условия существования периодического решения. Для этого изучим расположение изоклин  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$  системы (2), которые обозначим соответственно  $I^\infty$ ,  $I_t^0$  (изоклина нуля является подвижной).

При каждом  $t$  изоклина  $I_t^0$  делит плоскость  $xOy$  на две части: внутреннюю, где  $\dot{x} < 0$  ( $\dot{y} < 0$ ); внешнюю, где  $\dot{x} > 0$  ( $\dot{y} > 0$ ). Эти части обозначим соответственно  $X^{int}$ ,  $X^{ext}$  ( $Y_t^{int}$ ,  $Y_t^{ext}$ ). Построим для  $I_t^0$  соответствующие неподвижные (стационарные) внутреннюю и внешнюю части фазовой плоскости:

$$Y^{ext} = \{(x, y) : f_2(t, x, y) > 0, \forall t \in R\},$$

$$Y^{int} = \{(x, y) : f_2(t, x, y) < 0, \forall t \in R\}.$$

Очевидно,  $Y^{ext} \subset Y_t^{ext}$ ,  $Y^{int} \subset Y_t^{int}$  при всех  $t \in R$ . То есть изоклины удовлетворяют условиям

$$I_t^0 = X = \partial X = \partial X^{int} \cup \partial X^{ext},$$

$$I_t^0 \subset Y, \partial Y = \partial Y^{int} \cup \partial Y^{ext},$$

где  $Y$  – область, содержащая все  $I_t^0$ .

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Лемма.** Если область  $\Omega$  удовлетворяет теореме 1, то не может выполняться ни одно из условий:  $\Omega \subset X^{ext}$ ,  $\Omega \subset X^{int}$ ,  $\Omega \subset Y^{ext}$ ,  $\Omega \subset Y^{int}$ .

Далее в силу леммы при построении канонической области  $\Omega$  будем использовать включение  $\Omega \supset X \cap Y$ . Кроме того,  $\partial\Omega$  удобно искать в виде прямоугольника  $ABCD$ :

$$AB : \Phi_1(x, y) = y_1 - y = 0; \text{grad}\Phi_1 = (0; -1);$$

$$BC : \Phi_2(x, y) = x - x_2 = 0; \text{grad}\Phi_2 = (1; 0);$$

$$AD : \Phi_3(x, y) = x_1 - x = 0; \text{grad}\Phi_3 = (-1; 0);$$

$$DC : \Phi_4(x, y) = y - y_2 = 0; \text{grad}\Phi_4 = (0; 1).$$

При этом требуется проверка неравенств того же порядка, что и правая часть рассматриваемой системы. Тогда теореме 1 можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 2.** Пусть правая часть системы (2) на границе  $ABCD$  удовлетворяет условию

$$\begin{cases} f_2(t, x, y) \geq 0, \text{ если } \Phi_1 = 0, \\ f_1(x, y) \leq 0, \text{ если } \Phi_2 = 0, \\ f_1(x, y) \geq 0, \text{ если } \Phi_3 = 0, \\ f_2(t, x, y) \leq 0, \text{ если } \Phi_4 = 0. \end{cases}$$

Тогда система (2) имеет  $T$ -периодическое решение с начальным значением внутри  $ABCD$ .

Допустим, для системы (2) построена положительно инвариантная область  $\Omega$ , удовлетворяющая теореме 1. Произвольно выберем

$$z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \Omega - \text{решения системы (2)}$$

в векторной форме  $\dot{z} = f(z) + \text{colon}(0, c(t))$ . В силу системы (2) для функции  $V(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^2$  по формуле Лагранжа получим

$$\dot{V}(z_1, z_2) = 2(z_1 - z_2)^T F(\tilde{z})(z_1 - z_2),$$

$$\text{где } F(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(\tilde{z})}{\partial z} + \left( \frac{\partial f(\tilde{z})}{\partial z} \right)^T \right) - \text{симметризо-}$$

ванная матрица Якоби,  $\tilde{z} \in \Omega$  – некоторый вектор, выбор которого зависит от  $z_1$  и  $z_2$ . Если  $\dot{V} < 0$  при  $t \geq 0$ , то  $V$  строго убывает при  $t \geq 0$ . Допустим,  $z_1$  и  $z_2$  – различные  $T$ -периодические решения с траекториями, лежащими в  $\Omega$ . Тогда  $z_1(0) \neq z_2(0)$  и  $V(z_1(0), z_2(0)) > V(z_1(T), z_2(T))$ , то есть  $\|z_1(0) - z_2(0)\|_2 > \|z_1(T) - z_2(T)\|_2$ . Следовательно, функция  $z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  не является  $T$ -периодической. Таким образом, если  $\dot{V} < 0$  в  $\Omega$ , то в  $\Omega$  содержится единственная траектория периодического решения системы (2). Более того, если  $\dot{V} < 0$  в  $\Omega$  и  $z_1(t) \in \Omega$  –  $T$ -периодическое решение системы (2), то для любого другого решения  $z_2(t) \in \Omega$  имеет место оценка  $V(z_1(0), z_2(0)) > V(z_1(T), z_2(T))$ . Значит, оператор монодромии отображает окрестность начального значения  $z_1(t)$  в себя. Отсюда по индукции следует асимптотическая устойчивость периодического решения  $z_1(t)$  [3].

Если  $F(z) < 0$  в области  $\Omega$ , то  $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ .

Для системы (2) имеем  $F(z) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}$ ,

$F_{11} = k$ ,  $F_{12} = (2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1)/2$ ,  $F_{22} = 2\gamma y - (k + b)$ . По критерию Сильвестра условие  $F(z) < 0$  в  $\Omega$  равносильно системе оценок для главных миноров:

$$\begin{cases} \Delta_1 = k < 0, \\ \Delta_2 = (2\gamma y - (k + b)) \cdot k - \\ - (2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1)^2 / 4 > 0. \end{cases}$$

Итак, если существование периодического решения системы (2) установлено по теореме 1, то для асимптотической устойчивости этого решения достаточно, чтобы в  $\Omega$  имели место оценки  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ . Поэтому всюду далее, решая поставленную задачу, будем полагать, что выполняется условие

$$k < 0. \tag{3}$$

При этом из принятого ранее условия  $\beta + 2\gamma k = 0$  следует, что коэффициенты  $\beta, \gamma$  одного знака.

Рассмотрим невырожденный частный случай соответствия изоклины  $I_t^0$  одной из стандартных форм для кривых второго порядка, когда система (2) не является линейной.

Будем использовать обозначения

$$c_1 = \inf_{[0, T]} c(t); \quad c_2 = \sup_{[0, T]} c(t).$$

Допустим,  $\gamma \neq 0$ ,  $\alpha - \gamma k^2 \neq 0$ . Выделим полные квадраты в уравнении для  $I_t^0$ :

$$(\alpha - \gamma k^2) \left( x + \frac{a + bk + k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)} \right)^2 + \gamma \left( y - \frac{k + b}{2\gamma} \right)^2 + \left( c(t) - \frac{(a + bk + k^2)^2}{4(\alpha - \gamma k^2)} - \frac{(k + b)^2}{4\gamma} \right) = 0. \quad (4)$$

Обозначим  $(x_0, y_0) = \left( \frac{-a - bk - k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)}, \frac{k + b}{2\gamma} \right)$  –

центр кривой, заданной равенством (4), на декартовой плоскости.

Найдем условия существования положительно инвариантной прямоугольной области, ограниченной контуром  $\partial\Omega = ABCD$  согласно теореме 2. При этом две стороны прямоугольника

$$AD: \begin{cases} y \leq kx_1, \\ x = x_1 = x_0 + \mu_1, \end{cases} \quad CB: \begin{cases} y \geq kx_2, \\ x = x_2 = x_0 + \lambda_1 \end{cases}$$

согласуются с расположением изоклины бесконечности (см. рис. 1), то есть должны соблюдаться оценки  $y_2 \leq kx_1$  и  $y_1 \geq kx_2$ .

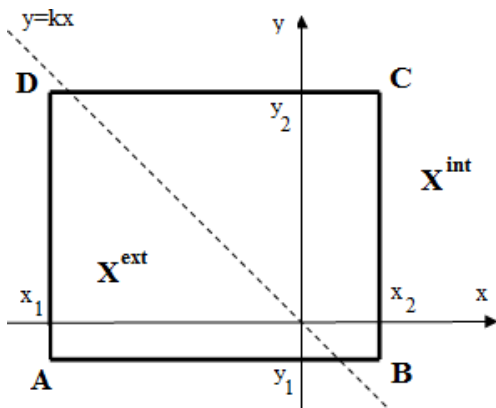


Рис. 1. Расположение положительно инвариантной прямоугольной области и изоклины бесконечности системы (2)

Изоклина  $I_t^0$  при любом  $t \in R$  представляет собой невырожденную кривую (эллипс или гиперболу), если справедливо неравенство

$$c_2 < m, \quad (5)$$

в котором  $m = \frac{(a + bk + k^2)^2}{4(\alpha - \gamma k^2)} + \frac{(k + b)^2}{4\gamma}$ .

Допустим, справедливы оценки

$$\gamma > 0, \quad \alpha - \gamma k^2 > 0, \quad (6)$$

Тогда при любом  $t \in R$  изоклина  $I_t^0$  – это невырожденный эллипс с центром  $(x_0, y_0)$  и с полуосями

$$\sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}}, \quad \sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}}.$$

При этом полуоси границы  $I_0^1$  области  $Y^{int}$ :

$$q_1 = \inf_{[0, T]} \left( \sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_2}{\alpha - \gamma k^2}},$$

$$s_1 = \inf_{[0, T]} \left( \sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_2}{\gamma}},$$

полуоси границы  $I_0^2$  области  $Y^{ext}$ :

$$q_2 = \sup_{[0, T]} \left( \sqrt{\frac{m - c(t)}{\alpha - \gamma k^2}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_1}{\alpha - \gamma k^2}},$$

$$s_2 = \sup_{[0, T]} \left( \sqrt{\frac{m - c(t)}{\gamma}} \right) = \sqrt{\frac{m - c_1}{\gamma}}.$$

Предположим, что:

- 1) точка  $(x_0, y_0)$  лежит выше изоклины  $I^\infty$ ,
- 2) точка  $(x_0, y_0 - s_2)$  лежит ниже  $I^\infty$ ,
- 3)  $I^\infty \cap I_0^1 \neq \emptyset$ , то есть уравнение (4) имеет решение при  $y = kx$ ,  $c(t) = c_2$ ,
- 4) пересечение линий  $x = x_2$  и  $I_0^2$  располагается выше пересечения линий  $x = x_2$  и  $I^\infty$ .

Тогда справедливы оценки

$$\frac{k + b}{2\gamma} - \sqrt{\frac{m - c_1}{\gamma}} < -k \frac{a + bk + k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)} < \frac{k + b}{2\gamma}, \quad (7)$$

$$a^2 - 4\alpha c_2 \geq 0, \quad (8)$$

$$k(x_0 + \lambda_1) < y_0 + s_2 \sqrt{1 - (\lambda_1/q_2)^2}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что при этом границы области  $\Omega$  можно выбрать в виде

$$AB: y = y_1 = y_0 + \mu_2, \quad \mu_2 \leq -s_2,$$

$$DC: y = y_2 = y_0 + \lambda_2,$$

$$x_1 \leq x \leq x_2,$$

где  $\lambda_2 \in (-q_1, q_1)$  – некоторое число (см. рис. 2).

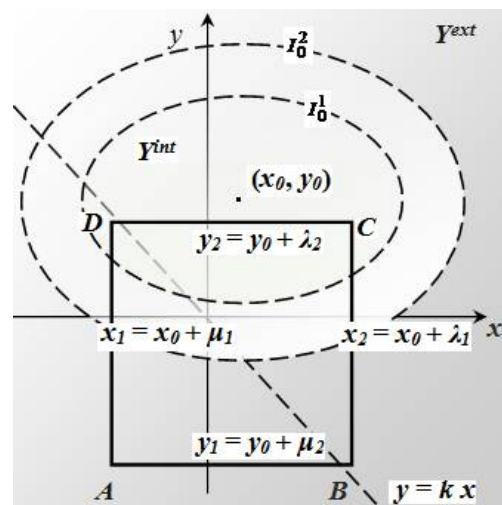


Рис. 2. Расположение положительно инвариантной прямоугольной области и неподвижных изоклин системы (2)

Итак, в силу теоремы 2 система 2 имеет периодическое решение. Как уже сказано ранее, для его асимптотической устойчивости достаточно, чтобы в  $\Omega$  выполнялась оценка  $\Delta_2 > 0$  или, что то же самое,  $\min_{\Omega} \Delta_2 > 0$ .

В силу условий (3), (5) функция  $\Delta_2$  убывает по переменной  $y$ . Поэтому при  $x_1 \leq x \leq x_2$  должно быть справедливо неравенство

$$(2\gamma\lambda_2 - (k + b)) \cdot k - \frac{-(2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1)^2}{4} = 2\gamma k \lambda_2 - \frac{(2x(\alpha - \gamma k^2) + (a + bk + k^2) - 1)^2}{4} > 0.$$

Следовательно, требуется выбрать  $\lambda_2 \in (-q_1, 0)$ .

Так как  $x_0 = \frac{-a - bk - k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)}$ , то последнее неравенство примет вид

$$x_0 + \frac{1 - \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)} < x < x_0 + \frac{1 + \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)}.$$

Для соблюдения этого условия необходима оценка  $\lambda_2 < 1/(8\gamma k)$ . В области  $\Omega$  имеем  $x_0 + \mu_1 \leq x \leq x_0 + \lambda_1$ . Значит,

$$\frac{1 - \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)} < \mu_1 < \lambda_1 < \frac{1 + \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)}. \quad (10)$$

Для локализации области  $\Omega$  допустим  $B, D \in I^\infty$ , то есть справедливы равенства

$$\mu_1 = (y_0 - kx_0 + \lambda_2)/k, \quad \lambda_1 = (y_0 - kx_0 + \mu_2)/k.$$

Тогда из условия (10) получим неравенство

$$\frac{1 - \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)} < \frac{\delta + \lambda_2}{k} < \frac{\delta + \mu_2}{k} < \frac{1 + \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)}, \quad (11)$$

в котором  $\delta = y_0 - kx_0$ . Так как  $\delta > 0$  по условию (7), то оценка (9) выполняется, по крайней мере, при любом  $\lambda_1 \in [-q_2, 0]$ . Выберем  $\lambda_1 = 0$  или, что то же самое,  $\delta + \mu_2 = 0$ . Это равенство возможно, если справедливо неравенство

$$\delta - s_2 = \frac{k + b}{2\gamma} + k \frac{a + bk + k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)} - \sqrt{\frac{m - c_1}{\gamma}} \geq 0. \quad (12)$$

Неравенство (12) следует из условия (7). Значит, при  $\lambda_2 < 0$  в силу условия (7) оценка (11) приобретает вид

$$\frac{1 - \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)} < \frac{\delta + \lambda_2}{k} < 0. \quad (13)$$

При условии (13) справедливо неравенство  $\min_{\Omega} \Delta_2 > 0$ , которое обеспечивает устойчивость периодического решения с траекторией, лежащей в области  $\Omega$ .

Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (3), (5), (6), (7), (8). Тогда уравнение (1) имеет  $T$ -периодическое решение, начальные значения которого расположены в области, ограниченной прямыми

$$AB: y = k \frac{-a - bk - k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)},$$

$$DC: y = \frac{k + b}{2\gamma} + \lambda_2,$$

$$AD: x = \left( \frac{k + b}{2\gamma} + \lambda_2 \right) / k,$$

$$CB: x = \frac{-a - bk - k^2}{2(\alpha - \gamma k^2)}.$$

Если существует  $\lambda_2: -\min\{q_1, \delta\} < \lambda_2 < 1/(8\gamma k)$ , при котором имеет место оценка (13), то периодическое решение асимптотически устойчиво.

**Пример.** Рассмотрим уравнение вида (1)

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + \cos t / 8 + 2x^2 + 3x\dot{x} + 3(\dot{x})^2 / 2 = 0. \quad (14)$$

Вычислим  $k = -\beta/(2\gamma) = -1$ . Выполняется условие (3). Составим систему вида (2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x^2 / 2 + 3y^2 / 2 - 2y + \cos t / 8. \end{cases} \quad (15)$$

Изоклины системы (15) и окрестность множества  $X \cap Y$  изображены на рисунках 3, 4 (следующие далее изображения получены в пакете Maple).

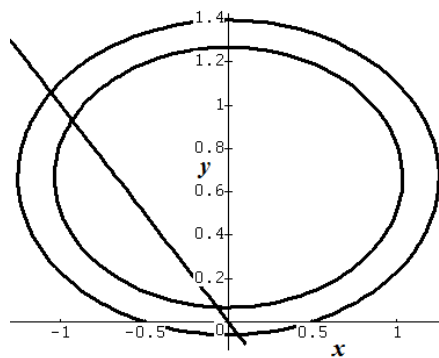


Рис. 3. Расположение неподвижных изоклин системы (15)

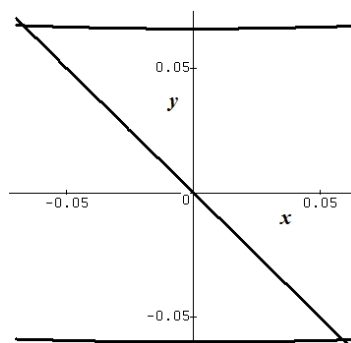


Рис. 4. Локализация пересечения множеств  $X$  и  $Y$  для системы (15)

Вычислив  $c_1 = -1/8, c_2 = 1/8, m = 2/3$ , получим, что  $m > c_2, a^2 - 4ac_2 = 3 > 0$ . Значит, выполняются условия (5), (8).

Так как  $\gamma = 3/2 > 0, \alpha - \gamma k^2 = 1/2 > 0$ , то выполняется условие (6).

Координаты центра неподвижных изоклин нуля:  $x_0 = 0, y_0 = 2/3$ . Полуось изоклины  $I_0^2$  вдоль оси  $Oy$  равна  $s_2 = \sqrt{19}/6$ . Поэтому

$$y_0 - s_2 \approx -0,0598 < kx_0 = 0 < y_0.$$

То есть выполняется условие (7).

Выберем

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3} \in (-\min\{q_1, \delta\}, \frac{1}{8\gamma k}) = (-\frac{\sqrt{39}}{6}, -\frac{1}{12}).$$

Тогда получим

$$\frac{1 - \sqrt{8\gamma k \lambda_2}}{2(\alpha - \gamma k^2)} = -1 < \frac{\delta + \lambda_2}{k} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Значит, выполняется условие (13).

Итак, по теореме 3 уравнение (14) имеет асимптотически устойчивое  $2\pi$ -периодическое решение. Полученный вывод иллюстрируют рисунки 5, 6. Заметим, что расположение цикла на рисунке 5 соответствует области, изображенной на рисунке 4.

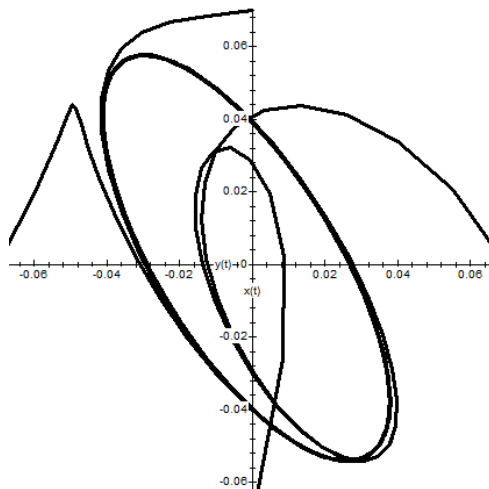


Рис. 5. Траектории системы (15)

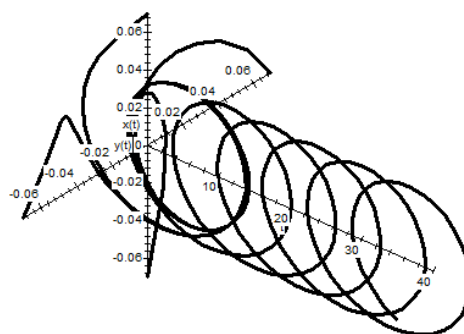


Рис. 6. Интегральные кривые системы (15)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р.** Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М. : Мир, 1974.
2. **Абрамов В.В.** Ветвление периодического решения уравнения Рэлея // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования, 26–28 апреля 2016 г. : материалы конф. – Рязань : Изд-во РГУ им. С.А. Есенина, 2016.
3. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1966.

Абрамов Владимир Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 97-15-25; e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru



УДК 311.2

# О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СОВЕРШЕННЫХ ИНДЕКСОВ

С.И. Агарков

*Тулский государственный университет*

## ON THE POSSIBILITY OF CONSTRUCTING SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PERFECT INDEXES

S.I. Agarkov

В работе рассматривается вопрос о возможности аппроксимации индекса Дивизиа с помощью метода наименьших квадратов, что позволяет перейти к практическому использованию непрерывных функций в теории экономического анализа.

*Ключевые слова:* математическая теория индексов, индекс цены Дивизиа, траекторное направление, метод наименьших квадратов.

Математическая теория совершенных индексов представляет собой раздел экономической теории, в которой сравниваются два состояния: основное и текущее. При этом рассматривается обычный в экономической теории круг вопросов: характер явления, влияние факторов, возможность построить обоснованный прогноз на некоторый промежуток времени. Такой подход является естественным для описания различных процессов, так как индексы дают качественную (индекс цен) и количественную (индекс объема производства) оценки изменения любого явления с течением времени, различного географического положения или по сравнению с выбранным базисным состоянием данного объекта. Развитие современных информационных технологий позволяет наблюдать изменение экономической ситуации в режиме реального времени, это требует появления новых математических инструментов для оценивания характера перемен и их направленности. Таким математическим инструментом может быть дифференциальное уравнение, предложенное итальянским математиком Ф. Дивизиа.

Следует отметить, что теорию индексов можно использовать в любой сфере деятельности.

Индексы, удовлетворяющие следующим критериям (тестам), называются совершенными:

The paper considers the question of the possibility of approximation of Divisia index using the method of least squares that allows you to navigate to the practical use of continuous.

*Keywords:* mathematical theory of indices, the index of prices, the direction path Divisia, method of least squares.

- 1) тест обратимости факторов;
  - 2) тест независимости ситуации от начально-го базиса;
  - 3) тест пропорциональности (или среднего) – если индивидуальные индексы являются средней величиной, то и общий индекс такая же средняя величина;
  - 4) тест циркулярности (цепи).
- Как было показано [1], этим критериям удовлетворяет индекс Дивизиа.

Можно отметить, что семейство индексов объемов  $D_q$  и цен  $D_p$  Дивизиа относится к индексам открытого типа [2].

В работах, посвященных экономическому росту, измерениям затрат, результатов и производительности, индексы Дивизиа или их дискретные аппроксимации являются естественными измерителями соответствующих процессов.

Для индекса цены Дивизиа имеется [1] следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dD_p}{dt} = D_p \frac{\sum_1^n q_i(t) \frac{dp_i}{dt}}{\sum_1^n q_i(t) p_i(t)}, \quad (1)$$

где  $p_i$  и  $q_i$  – цена и количество  $i$ -го товара (продукта);  $n$  – общее число товаров;  $t$  – время от начала выбранного базисного состояния до завершения наблюдения.

Задача Коши уравнения (1) ставится следующим образом: найти решение этого дифференциального уравнения для заданного начального значения функции Дивизия

$$D_p(t_0) = 1. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, решение которого может быть представлено в виде

$$D_p(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{\sum_{i=1}^n q_i(\tau) \frac{dp_i}{d\tau}}{\sum_{i=1}^n q_i(\tau) p_i(\tau)} d\tau \right). \quad (3)$$

Таким образом, решение задачи связано с выбором функций  $p_i(t)$  и  $q_i(t)$  (в этом смысле можно говорить о выборе путей интегрирования  $S[\pi]$ ).

Возможно, следующее решение относительно выбора семейства путей  $S[\pi]$ : соединение точек  $(p_i^0, q_i^0)$  и  $(p_i^1, q_i^1)$  (где верхний индекс «0» соответствует начальному значению цены или количества, соответственно  $i$ -го продукта за данный промежуток времени, а «1» – конечному) простейшим способом – отрезком прямой:

$$\left. \begin{aligned} p_i(t) &= p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0) \cdot t; \\ q_i(t) &= q_i^0 + (q_i^1 - q_i^0) \cdot t, t \in [0;1]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя соотношения (4) в подынтегральное выражение (3) и приводя подобные, приходим к интегралу от дробно-рациональной функции.

Таким образом, можно получить в явном виде выражения для индекса Дивизия, порождаемых путями  $S[\pi]$ . А. Фогт [1] назвал их «натуральными индексами».

Поскольку впервые представляется возможность вычислить индекс Дивизия для цены, воспользуемся данными Комитета госстатистики по Тульской области. Данные относятся к развитию зернового хозяйства Тульской области и содержат цены реализации и валовой сбор за пять лет. Эти данные представлены в следующих таблицах.

**Таблица 1.** Объемы валовых сборов сельхозпродукции по Тульской области (в сотнях тонн)

Зерновые культуры	1	2	3	4	5
Пшеница озимая	2236,3	2476	2679,9	3948,1	2350
Рожь озимая	373,4	452,8	670,4	783,5	546
Пшеница яровая	551,4	579,7	673,1	796	721,4
Ячмень яровой	1185,3	1516,4	2695	3005,4	3185,9
Овес	248,8	451,5	653,1	604,7	498,2
Кукуруза на зерно	135,2	45,6	17,9	11,5	9,5
Просо	27,9	57,8	18	5,5	10,1
Гречиха	256,4	461	100	27,5	82,2

**Таблица 2.** Цены реализации сельхозпродукции по Тульской области (в рублях за тонну)

Зерновые культуры	1	2	3	4	5
Пшеница озимая	1507	2011	1956	1382	2566
Рожь озимая	1313	2047	1896	977	1836
Пшеница яровая	1507	2011	1956	1382	2566
Ячмень яровой	1090	1758	1667	1180	2065
Овес	1100	1801	1470	1099	1400
Кукуруза на зерно	1441	1797	1733	2228	16247
Просо	1585	1831	1758	1877	2678
Гречиха	4148	1780	2747	2928	5057

Аппроксимируя эти данные линейными функциями  $p_i(t)$  и  $q_i(t)$  с помощью математического пакета STATISTICA, в котором для вычисления постоянных используется метод наименьших квадратов, и суммируя коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , можно получить дробно-рациональную подынтегральную функцию.

Для интеграла вида

$$\int \frac{m \cdot x + k}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c} dx \quad (5)$$

существует три варианта формул, каждый из которых определяется знаком или обращением в нуль дискриминанта знаменателя. В данном случае интеграл (5) имеет вид

$$\int \frac{10,122 \cdot x + 53,86}{11,586 \cdot x^2 + 141,839 \cdot x + 712,282} dx.$$

Дискриминант знаменателя является отрицательной величиной.

Учитывая пределы интегрирования ( $t_0 = 1$ ) и проводя необходимые промежуточные вычисления с помощью математического пакета MathCad 15, после подстановки в (3) получим следующее выражение для индекса цены Дивизия:

$$D_p(t) = \exp[0,437 \ln |1,586t^2 + 141,839t + 712,282 - 0,13 \cdot \arctg(0,204t + 1,249) - 2,831].$$

Предпринимались попытки найти явные выражения для индексов Дивизия, порождаемых также экспоненциальными путями:

$$\left. \begin{aligned} p_i(t) &= \alpha p_i^0 \exp((\ln p_i^1 - \ln p_i^0) \cdot t); \\ q_i(t) &= \beta q_i^0 \exp((\ln q_i^1 - \ln q_i^0) \cdot t); t \in [0;1], \end{aligned} \right\}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные величины, определяемые с помощью метода наименьших квадратов. Оказалось, что в этом случае соотношения (3) не выражаются в элементарных функциях и могут быть вычислены только численно.

Таким образом, впервые получено точное решение дифференциального уравнения для индекса Дивизия в предположении о линейной функции для количества и линейной функции цены каждого продукта.

В заключение сравним две модели описания развития зернового хозяйства Тульской области: на основе индекса Фишера (обычная практика экономических расчетов) и на основе индекса Дивизиа, представленного полученным соотношением.

Данные расчета приведены на рисунке 1, где точками отмечены индексы Фишера, а сплошная линия – результаты расчета индекса Дивизиа с помощью программы STATISTICA.

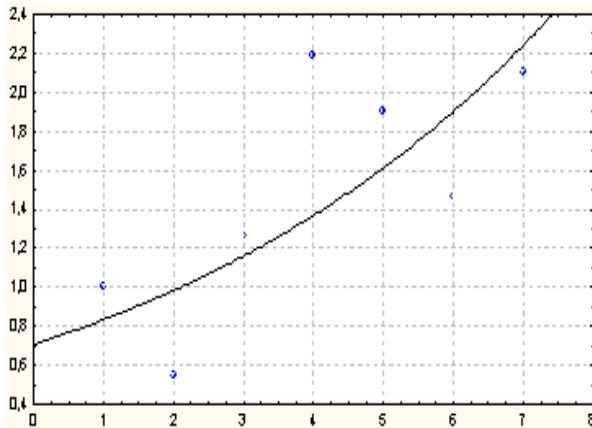


Рис. 1 Зависимость индекса Дивизиа цены от времени

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Э.Б.** Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 136–154.
2. **Агарков С.И., Тритенко Е.В.** Вычисление индексов открытого типа // Вестник Тульского государственного университета – Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2013. – Вып. 1. – С. 31–36.

Можно отметить хорошее совпадение для третьего и седьмого годов наблюдения.

Полученное аналитическое решение дифференциального уравнения для индекса Дивизиа может быть полезным в таком новом направлении экономической теории, как математическое моделирование в экономической динамике.

Агарков Сергей Иванович, канд физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета.  
300021, г. Тула, Красноармейский пр., д. 16, кв. 216.  
Тел.: 8 903 037-79-61; e-mail: agarkov\_si@mail.ru

УДК 517.93

# ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. II

А.Ф. Андреев

*Санкт-Петербургский государственный университет*

И.А. Андреева

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

## PHASE PORTRAITS OF A FAMILY OF CUBIC DYNAMIC SYSTEMS IN A POINCARÉ CIRCLE. II

A.F. Andreev, I.A. Andreeva

Светлой памяти Алексея Фёдоровича Андреева посвящается

Предлагаемая вниманию читателя статья продолжает начатое авторами в статье [1] подробное изложение результатов оригинального исследования в круге Пуанкаре широкого семейства кубических динамических систем, правые части которых суть формы их фазовых переменных (кубическая форма в одном уравнении и квадратичная в другом). В работе строятся все допустимые для систем изучаемого семейства различные фазовые портреты в круге Пуанкаре и указываются близкие к коэффициентным критерии реализации таких портретов. Детально излагаются методы, разработанные авторами специально для этого исследования. Нумерация параграфов, пунктов, формул и таблиц в серии статей принята сквозная.

*Ключевые слова:* динамические системы, круг Пуанкаре, фазовые переменные, фазовые портреты, особые точки, сепаратрисы, топологические типы особых точек.

### § 2. Изучение (2,2)-семейства (0.1)-систем

Это семейство есть совокупность всех (0.1)-систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_3(y - u_1x)^{k_1}(y - u_2x)^{k_2} \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= c(y - q_1x)(y - q_2x) \equiv Y(x, y), \end{aligned} \quad (0.1)_2$$

где  $p_3, c, u_1, u_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ,  $p_3 > 0$ ,  $u_1 < u_2$ ,  $q_1 < q_2$ ,  $u_i \neq q_j$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $k_1, k_2 \in \{1, 2\}$ ,  $k_1 + k_2 = 3$ .

Естественно различать два класса таких систем: системы с  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  – класс 1, системы с  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  – класс 2. Но ДЗ-преобразование (то есть двойная замена в (0.1)-системе:  $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$ ). Она преобразует произвольную (0.1)-систему в некоторую, вообще говоря, другую (0.1)-систему, внося в преобразуемую систему следующие изменения: 1) изменяет знаки вещественных корней ее полиномов  $P(u)$ ,  $Q(u)$ , а потому и членов ее ПКРQ на обратные, 2) изменяет знак ее переменной  $t$ , а потому и направление движения с возрастанием  $t$  по любой ее траектории на обрат-

The proposed article continues the presentation of the original investigation of a broad family of cubic dynamic systems in a Poincaré circle, which was started by the authors in the article [1]. For the family of dynamic systems with right-hand sides that are forms of their phase variables – the cubic form in the first equation and the square form in the second one – all possible in a Poincaré circle topologically different phase portraits have been constructed, and close to coefficient criteria of their appearance have been revealed. Methods of investigation invented especially for this study have been thoroughly described. In the whole series of articles the continuous numbering of paragraphs, section items, formulas and tables is adopted.

*Keywords:* dynamic systems, Poincaré circle, phase variables, phase portraits, singular points, separatrix, topological types of singular points.

ное. См. статью [1]) системы класса 1 преобразует в системы класса 2 (и наоборот). Поэтому далее мы будем изучать лишь (2,2)-системы класса 1.

Найдя все различные фазовые портреты (ФП) систем этого класса и построив их ДЗ-образы, мы получим все различные ФП (2,2)-систем класса 2.

Произвольная система этого семейства, будучи записана в координатах Пуанкаре  $u, z, \tau$

$$u = \frac{y}{x}, z = \frac{1}{x} \left( x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} \right), dt = z^2 d\tau,$$

принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} = uP(u) + Q(u)z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -zP(u). \quad (2.1)$$

### 2. (2,2)-семейство (0.1)<sub>2</sub>-систем класса 1

Это семейство есть совокупность всех (0.1)<sub>2</sub>-систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_3(y - u_1x)(y - u_2x)^2 \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= c(y - q_1x)(y - q_2x) \equiv Y(x, y), \end{aligned} \quad ((0.1)_2)_1$$

где  $p_3, c, u_1, u_2, q_1, q_2$  – те же, что и в ((0.1)<sub>2</sub>).

Первое преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} \left( u = \frac{y}{x}, z = \frac{1}{x} \right) \quad (2.0)_1$$

преобразует произвольную систему этого семейства в систему [1, часть II, §2], которая после замены времени  $dt = z^2 d\tau$  принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} = -uP(u) + zQ(u), \quad \frac{dz}{d\tau} = -zP(u),$$

где  $P(u) \equiv X(1, u)$  и  $Q(u) \equiv Y(1, u)$  – взаимно простые полиномы.

**2<sub>0</sub>. Общие свойства систем 2-семейства**

Учитывая представление этих систем в видах  $((0.1)_2)_1$  и (2.1), находим, что любая из них обладает следующими свойствами.

1. Имеет особые точки: конечную  $O(0, 0)$  [1, 10, 11]; бесконечно удаленные (БО-точки)  $O_i(u_i, 0)$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $u_0 = 0$  [1, 10, 11, 12].

2. Ее полиномы  $P, Q$  суть  $P(u) \equiv X(1, u)$  и  $Q(u) \equiv Y(1, u)$ .

3. Она имеет одну из следующих последовательностей корней полиномов  $P, Q$  (ПКРQ) [1, 10, 12]:

- 1)  $u_1, u_2, q_1, q_2$ ;
  - 2)  $u_1, q_1, u_2, q_2$ ;
  - 3)  $q_1, u_1, u_2, q_2$ ;
  - 4)  $u_1, q_1, q_2, u_2$ ;
  - 5)  $q_1, u_1, q_2, u_2$ ;
  - 6)  $q_1, q_2, u_2, u_1$ .
- (2<sub>r</sub>)

Из пункта 3 следует, что 2-семейство распадается на  $2_r$ -семейства,  $r = \overline{1, 6}$ , для каждого из которых все его системы имеют одну и ту же ПКРQ:  $(ПКРQ)_r$ , где  $r$  – ее номер по перечню (2<sub>r</sub>).

ДЗ-классификация  $2_r$ -семейств дает: семейства  $2_r$ ,  $r = \overline{1, 4}$ , ДЗ-независимы, а семейства  $2_5$  и  $2_6$  – ДЗ-взаимно обратны семействам  $2_2$  и  $2_1$  соответственно. Поэтому далее мы будем изучать сначала (поочередно)  $2_r$ -семейства,  $r = \overline{1, 4}$ , по программе исследования (0.1) систем 0.5 [1, часть IV]. Затем мы изучим (параллельно)  $2_r$ -семейства,  $r = 5, 6$ , используя их ДЗ-связи с семействами  $2_2$  и  $2_1$ .

**(2<sub>1</sub>)<sub>0</sub>. 2<sub>1</sub>-семейство (0.1)<sub>2</sub>-систем класса 1**

Это семейство есть совокупность всех (0.1)<sub>2</sub>-систем, каждая из которых имеет ПКРQ =  $(ПКРQ)_1 = \{u_1, u_2, q_1, q_2\}$ . Ниже мы изучаем его по программе 0.5 [1, часть IV].

**(2<sub>1</sub>)<sub>1</sub>. Топодинамические типы (ТД-типы) особых точек систем 2<sub>1</sub>-семейства (0.1)<sub>2</sub>-систем класса 1**

Из [1], часть I, таблица 1.1<sub>1</sub>, и [1], § 0 следует, что ТД-тип особой точки  $O(0, 0)$  любой системы 2<sub>1</sub>-семейства описывает слово

$$\overline{A_0} = S_0(S_+^1)^-(N_+^2)^-S_0(N_-^1)^-(S_-^2)^- = S_0(S_+^1)^-N^-(S_-^2)^-. \quad (2_1)_1$$

Чтобы найти ТД-типы БО-точек систем 2<sub>1</sub>-семейства, разбиваем его на 2<sub>1,s</sub>-семейства,  $s = \overline{1, 5}$ , и ищем ТД-типы БО-точек 2<sub>1,s</sub>-систем.

На основании теорем 3.1, 4.1 части II [1] и пункта 0.1 из § 0[1] ТД-типы  $\overline{A}_i^{+(-)}$  БО-точек  $O_i^{+(-)}$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , дает (построчно) таблица (2<sub>1</sub>)<sub>1</sub>.

**Таблица (2<sub>1</sub>)<sub>1</sub>. ТД-типы БО-точек 2<sub>1,s</sub>-систем,  $s = \overline{1, 5}$ .**

№	Случай $s$	$\overline{A}_0^{+(-)}$	$\overline{A}_1^{+(-)}$	$\overline{A}_2^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^-$	$N_+^+(S_-^-)$	$S_+^+(N_+^+)(\emptyset)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^-N_+^+(\emptyset)$	–	–“–
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N_+^+(N_-^-)$	$N_-^-(S_+^+)$	–“–
4	$u_2 = 0$	–“–	–“–	–
5	$u_2 < 0$	–“–	–“–	$\emptyset(N_-^-(S_+^+))$

**(2<sub>1</sub>)<sub>2</sub>. Поведение сепаратрис 2<sub>1,s</sub>-систем в круге Пуанкаре  $\Omega$**

Из пункта (2<sub>1</sub>)<sub>1</sub> следует, что эти системы имеют сепаратрисы:  $S_0, S_+^1, S_-^2, S_1^-, S_2^+$ , кроме случаев  $s = 2, 4$ , и 5; в случае 2 (4) из этого списка исчезает  $S_1^-(S_2^+)$ , в случае 5 в нем  $S_2^+$  заменяется на  $S_2^-$ .

Для  $s \in \{1, \dots, 5\}$  строим «бездорожную карту» (БД-карту [1]) 2<sub>1,s</sub>-систем и изучаем по ней глобальное продолжение (ГП) в круге  $\Omega$  каждой сепаратрисы этих систем и взаимное расположение сепаратрис (ВРС) в  $\Omega$  всех этих систем. Продолав эту работу, приходим к следующим выводам.

**Случай  $s = 1 (0 < u_1)$  и  $s = 2 (u_1 = 0)$**

В каждом из них сепаратрисы всех систем – обыкновенные, то есть глобальное продолжение (ГП) каждой из них в  $\Omega$  однозначно, а потому и взаимное расположение сепаратрис (ВРС) всех этих систем в  $\Omega$  неизменно. Поэтому при  $s \in \{1, 2\}$ , все 2<sub>1,s</sub>-системы имеют в круге  $\overline{\Omega}$  один и тот же фазовый портрет (ФП 2<sub>1,s</sub>).

Случай  $s = 3$  ( $u_1 < 0 < u_2$ ) и  $s = 4$  ( $u_2 = 0$ )

В каждом из них сепаратрисы  $S_2^-$  и  $S_1^-$  особые. Они по одному разу пересекают радиус  $OO_0^-$  круга  $\Omega$ , скажем, в точках  $x_2^-$  и  $x_1^-$ , для которых возможны три варианта последования на этом радиусе: 1)  $x_1^- < x_2^-$ , 2)  $x_1^- = x_2^-$ , 3)  $x_1^- > x_2^-$ . Значит, при  $s \in \{3, 4\}$   $2_{1,s}$ -семейство распадается на  $2_{1,s,l}$ -семейства,  $l = \overline{1, 3}$ , для каждого из которых его системы уже имеют особые сепаратрисы, а потому они имеют в  $\overline{\Omega}$  один и тот же фазовый портрет (ФП  $2_{1,s,l}$ ).

Случай  $s = 5$  ( $u_2 < 0$ )

В нем сепаратрисы  $S_2^-$ ,  $S_1^-$  и  $S_2^+$  особые. Они по одному разу пересекают радиус  $OO_0^-$  круга  $\Omega$ , но для них возможны 5 вариантов последования на этом радиусе. В обозначениях, аналогичных таковым для случаев  $s = 3$  и  $s = 4$ , эти варианты имеют вид

- 1)  $x_2^- < x_1^- < x_2^+$ , 2)  $x_2^- < x_1^- = x_2^+$ , 3)  $x_2^- < x_2^+ < x_1^-$ ,
- 4)  $x_2^- = x_2^+ < x_1^-$ , 5)  $x_2^+ < x_2^- < x_1^-$

(здесь всегда  $x_2^- < x_1^-$ , а  $x_2^+$  блуждает около нее). Значит,  $2_{1,s}$ -семейство (0.1)-систем класса 1 распадается на  $2_{1,s,l}$ -семейства,  $l = \overline{1, 5}$ , для каждого из которых все его системы имеют в круге  $\overline{\Omega}$  один и тот же фазовый портрет (ФП  $2_{1,s,l}$ ).

**(2<sub>1</sub>)<sub>3</sub>. Описательные фазовые портреты (ОФП)  $2_{1,s}$ -систем,  $s = \overline{1, 5}$**

Из пункта (2<sub>1</sub>)<sub>2</sub> следует, что такие системы имеют в круге  $\overline{\Omega}$  тринадцать различных ФП. Строим их описательные фазовые портреты (ОФП). Шесть из них выписываем явно, остальные семь даем методом деформации базовой таблицы (ДБТ) [1].

**Таблица 2.1.1.** ОФП  $2_{1,1}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_2^+ S_2^+ S_1^+$	$O_1^+ \rightarrow O_2^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_2^- S_1^-$	$O \rightarrow O_2^+$
3	$S_-^2 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_3$	$S_-^2 S_1^- S_0$	$O_0^+ \rightarrow O_2^+$
4	$S_+^2 : O_2^+ \rightarrow O_0^+$	$\Omega_4$	$S_2^+$	$O_0^+ \rightarrow O_2^+$
5	$S_1^- : O_1^- \rightarrow O_0^+$	$\Omega_5$	$S_1^-$	$O_0^+ \rightarrow O_2^+$

**Таблица 2.1.3.1.** ОФП  $2_{1,3,1}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_2^+ S_1^+$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_2^-$	$O \rightarrow O_0^+$
3	$S_-^2 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_3$	$S_-^2 S_1^- S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_2^+$
4	$S_2^- : O_1^+ \rightarrow O_2^+$	$\Omega_4$	$S_2^+$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
5	$S_1^- : O_1^+ \rightarrow O_0^-$	$\Omega_5$	$S_1^-$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

**Таблица 2.1.3.3.** ОФП  $2_{1,3,3}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_2^+ S_1^+$	$O_1^+ \rightarrow O_2^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_2^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_1^-$	$O \rightarrow O_2^+$
3	$S_1^- : O \rightarrow O_1^-$	$\Omega_3$	$S_1^- S_2^-$	$O \rightarrow O_0^-$
4	$S_-^2 : O \rightarrow O_0^-$	$\Omega_4$	$S_-^2 S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$
5	$S_2^+ : O_1^+ \rightarrow O_2^+$	$\Omega_5$	$S_2^+$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$

**Таблица 2.1.5.1.** ОФП  $2_{1,5,1}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_+^1$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_0^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_-^2 S_-^2$	$O \rightarrow O_0^+$
3	$S_-^2 : O \rightarrow O_0^+$	$\Omega_3$	$S_-^2 S_1^- S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
4	$S_1^- : O_1^+ \rightarrow O_1^-$	$\Omega_4$	$S_1^- S_2^-$	$O_1^+ \rightarrow O_2^-$
5	$S_2^- : O_1^+ \rightarrow O_2^-$	$\Omega_5$	$S_2^-$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

**Таблица 2.1.5.3.** ОФП  $2_{1,5,3}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0 S_+^1$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_0^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_1^- S_1^-$	$O \rightarrow O_0^+$
3	$S_1^- : O \rightarrow O_1^-$	$\Omega_3$	$S_1^- S_-^2$	$O \rightarrow O_2^-$
4	$S_-^2 : O \rightarrow O_2^-$	$\Omega_4$	$S_-^2 S_2^-$	$O_1^+ \rightarrow O_2^-$
5	$S_2^- : O_1^+ \rightarrow O_2^-$	$\Omega_5$	$S_2^-$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

**Таблица 2.1.5.5.** ОФП  $2_{1,5,5}$ -систем

1	$S_0 : O_1^+ \rightarrow O$	$\Omega_1$	$S_0^2 S_+^1$	$O_1^+ \rightarrow O_0^+$
2	$S_+^1 : O \rightarrow O_0^+$	$\Omega_2$	$S_+^1 S_1^-$	$O \rightarrow O_0^+$
3	$S_1^- : O \rightarrow O_1^-$	$\Omega_3$	$S_1^- S_2^-$	$O \rightarrow O_2^-$
4	$S_2^- : O \rightarrow O_2^-$	$\Omega_4$	$S_2^- S_-^2$	$O \rightarrow O_0^-$
5	$S_-^2 : O \rightarrow O_0^-$	$\Omega_5$	$S_-^2 S_0$	$O_1^+ \rightarrow O_0^-$

**Таблица 2.1.6.** ОФП  $2_{1,s}$ -систем,  $s = \overline{2, 5}$ .

Метод ДБТ (деформации базовой таблицы) [1]

ИТ (искомая таблица)	БТ (базовая таблица)	Деформация БТ	ПС БТ (перестановка строк БТ)
2.1.2	2.1.1	Удаление строки 5	—
2.1.3.2	2.1.3.3	Удаление строки 3	4, 5 → 3, 6
2.1.4.l, l = $\overline{1, 3}$	2.1.3.l	—	—
2.1.4.2	2.1.3.2	Удаление строки 4	5 → 4
2.1.5.2	2.1.5.1	Удаление строки 4 и $S_1^-$ из строки 3	—
2.1.5.4	2.1.5.5	Удаление строки 4	—

**(2<sub>2</sub>)<sub>0</sub>. (3.2)<sub>2</sub>-семейство (0.1)<sub>1</sub>-систем**

Это семейство есть совокупность всех (0.1)<sub>1</sub>-систем, каждая из которых имеет ПКРQ = (ПКРQ)<sub>2</sub> = {u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, u<sub>3</sub>} (см. пункт 1.0, перечень (1.0.0) [1]). Ниже мы изучаем его по программе 0.5 [1].

**2<sub>1</sub>. Топодинамические типы (ТД-типы) особых точек систем (3.2)<sub>2</sub>-семейства**

Используя таблицу 1.0.2, строка 2, и методику пункта 0.1 [1], находим: топодинамический тип особой точки O(0, 0) любой системы этого семейства описывает слово

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= S_0(N_+^1)^+(S_+^2)^+S_0(S_-^1)^+(N_-^2)^+ = \\ &= N^+(S_+^2)^-S^0(S_-^1)^+. \end{aligned} \quad (2_1)_2$$

Для нахождения ТД-типов БО-точек систем (3.2)<sub>2</sub>-семейства разбиваем его на (3.2)<sub>2,s</sub>-семейства, s = 1, 7, и ищем ТД-типы БО-точек (3.2)<sub>2,s</sub>-систем. Тем же способом, что и для (3.2)<sub>1</sub>-систем [1, пункт 1<sub>1</sub>], находим: ТД-типы  $\bar{A}_i^{+(-)}$  БО-точек  $O_i^{+(-)}$ , i = 0, 3, систем (3.2)<sub>2</sub>-семейства дает (построчно) таблица (2<sub>2</sub>)<sub>1</sub>.

**Таблица (2<sub>2</sub>)<sub>1</sub>. ТД-типы БО-точек (3.2)<sub>2,s</sub>-систем, s = 1, 7**

№	Случай s	$\bar{A}_0^{+(-)}$	$\bar{A}_1^{+(-)}$	$\bar{A}_2^{+(-)}$	$\bar{A}_3^{+(-)}$
1	0 < u <sub>1</sub>	N <sup>-</sup> (N <sup>-</sup> )	N <sup>+</sup> (S <sup>-</sup> )	S <sup>+</sup> (N <sup>-</sup> )	N <sup>+</sup> (S <sup>-</sup> )
2	u <sub>1</sub> = 0	N <sup>-</sup> N <sup>+</sup> (∅)	-	-“-	-“-
3	u <sub>1</sub> < 0 < u <sub>2</sub>	N <sup>+</sup> (N <sup>+</sup> )	N <sup>-</sup> (S <sup>+</sup> )	-“-	-“-
4	u <sub>2</sub> = 0	∅ (N <sup>-</sup> N <sup>-</sup> )	-“-	-	-“-
5	u <sub>2</sub> < 0 < u <sub>3</sub>	N <sup>-</sup> (N <sup>-</sup> )	-“-	S <sup>-</sup> (N <sup>+</sup> )	-“-
6	u <sub>3</sub> = 0	N <sup>-</sup> N <sup>+</sup> (∅)	-“-	-“-	-
7	u <sub>3</sub> < 0	N <sup>+</sup> (N <sup>+</sup> )	-“-	-“-	N <sup>-</sup> (S <sup>+</sup> )

**2<sub>2</sub>. Поведение сепаратрис (3.2)<sub>2,s</sub>-систем в круге Пуанкаре Ω**

Из пункта 2<sub>1</sub> следует, что эти системы, как правило, имеют следующие сепаратрисы: S<sub>+</sub><sup>2</sup>, S<sup>0</sup>, S<sup>-</sup>, S<sub>1</sub><sup>-</sup>, S<sub>2</sub><sup>+</sup>, S<sub>3</sub><sup>-</sup>, кроме случаев s = 2, 4 и 6, в каждом из которых одна из этих сепаратрис исчезает: S<sub>1</sub><sup>-</sup>, S<sub>2</sub><sup>+</sup> или S<sub>3</sub><sup>-</sup> соответственно.

Для s ∈ {1, ..., 7} строим «бездорожную карту» (БД-карту [1]) (3.2)<sub>2,s</sub>-систем и выясняем по ней глобальное продолжение (ГП) в круге Ω каждой сепаратрисы этих систем и взаимное расположение в нем сепаратрис (ВРС) всех систем (3.2)<sub>2,s</sub>-семейства. Прделав эту работу, приходим к следующему выводу.

Глобальное продолжение (ГП) любой сепаратрисы систем (3.2)<sub>2,s</sub>-семейства в круге Ω однозначно, а потому и взаимное расположение сепаратрис (ВРС) всех его систем в Ω неизменно. Значит, все (3.2)<sub>2,s</sub>-системы имеют в круге  $\bar{\Omega}$  один и тот же фазовый портрет (ФП Z<sub>2,s</sub>).

**2<sub>1</sub>. Описательные фазовые портреты (ОФП) систем (3.2)<sub>2</sub>-семейства**

Из пункта 2<sub>2</sub> следует, что для систем (3.2)<sub>2,s</sub>-семейства возможные семь различных ФП в круге  $\bar{\Omega}$ . Строим их описательные фазовые портреты (ОФП) – см. [1, § 0]. Четыре из них выписываем явно, три получаем методом деформации базовой таблицы (ДБТ) [1].

**Таблица 1.2.1. ОФП (3.2)<sub>2,1</sub>-систем**

1	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> : O <sub>0</sub> <sup>+</sup> → O	Ω <sub>1</sub>	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sup>0</sup>	O <sub>0</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
2	S <sup>0</sup> : O → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>2</sub>	S <sup>0</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
3	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O	Ω <sub>3</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>3</sub> <sup>-</sup>	O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O
4	S <sub>3</sub> <sup>-</sup> : O <sub>3</sub> <sup>-</sup> → O	Ω <sub>4</sub>	S <sub>3</sub> <sup>-</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O
5	S <sub>2</sub> <sup>+</sup> : O <sub>0</sub> <sup>+</sup> → O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>5</sub>	S <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>0</sub> <sup>+</sup> → O <sub>1</sub> <sup>+</sup>
6	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>1</sub> <sup>-</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>6</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>0</sub> <sup>-</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>

**Таблица 1.2.3. ОФП (3.2)<sub>2,3</sub>-систем**

1	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O	Ω <sub>1</sub>	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sup>0</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
2	S <sup>0</sup> : O → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>2</sub>	S <sup>0</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
3	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O	Ω <sub>3</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>3</sub> <sup>-</sup>	O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O
4	S <sub>3</sub> <sup>-</sup> : O <sub>3</sub> <sup>-</sup> → O	Ω <sub>4</sub>	S <sub>3</sub> <sup>-</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O
5	S <sub>2</sub> <sup>+</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>5</sub>	S <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>
6	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O <sub>1</sub> <sup>-</sup>	Ω <sub>6</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>2</sub> <sup>-</sup> → O <sub>0</sub> <sup>-</sup>

**Таблица 1.2.5. ОФП (3.2)<sub>2,5</sub>-систем**

1	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O	Ω <sub>1</sub>	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sup>0</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
2	S <sup>0</sup> : O → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>2</sub>	S <sup>0</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>0</sub> <sup>-</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
3	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O → O <sub>0</sub> <sup>-</sup>	Ω <sub>3</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>3</sub> <sup>-</sup>	O <sub>0</sub> <sup>-</sup> → O
4	S <sub>3</sub> <sup>-</sup> : O <sub>3</sub> <sup>-</sup> → O	Ω <sub>4</sub>	S <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O
5	S <sub>2</sub> <sup>+</sup> : O <sub>2</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>5</sub>	S <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>0</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>+</sup>
6	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>0</sub> <sup>-</sup> → O <sub>1</sub> <sup>-</sup>	Ω <sub>6</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>0</sub> <sup>-</sup> → O <sub>2</sub> <sup>-</sup>

**Таблица 1.2.7. ОФП (3.2)<sub>2,7</sub>-систем**

1	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O	Ω <sub>1</sub>	S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup> S <sup>0</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>
2	S <sup>0</sup> : O → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>2</sub>	S <sup>0</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>1</sub> <sup>-</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>
3	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O	Ω <sub>3</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>+</sub> <sup>2</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O
4	S <sub>2</sub> <sup>+</sup> : O <sub>2</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>	Ω <sub>4</sub>	S <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>3</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>+</sup>
5	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>1</sub> <sup>-</sup>	Ω <sub>5</sub>	S <sub>1</sub> <sup>-</sup> S <sub>3</sub> <sup>-</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>2</sub> <sup>-</sup>
6	S <sub>2</sub> <sup>-</sup> : O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Ω <sub>6</sub>	S <sub>3</sub> <sup>-</sup>	O <sub>1</sub> <sup>+</sup> → O <sub>0</sub> <sup>-</sup>

Таблица 1.2.8. ОФП  $(3.2)_{2,s}$ -систем,  $s = 2, 4, 6$ 

ИТ (искомая таблица)	БТ (базовая таблица)	Деформация БТ	ПС БТ (пере- становка строк БТ)
1.2.2	1.2.1	Удаление строки 7 и $S_1^-$ из строки 3	–
1.2.4	1.2.3	Удаление строки 6 и $S_2^+$ из строки 2	$7 \rightarrow 6$
1.2.6	1.2.7	Замена строк 6, 7 строкой 6: $S_1^- : O_1^-$ $\rightarrow O_1^-   \Omega_6   S_1^- :$ $O_1^+ \rightarrow O_2^-$	–

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Вестник РАЕН. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 8–18.
2. **Андреев А.Ф.** Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 136 с.
3. **Андреев А.Ф.** Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. – 160 с.
4. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Дифференциальные уравнения и процессы управления : электрон. журн. – 2007. – № 4. – С. 17–26. – Режим доступа : <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
5. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II // Дифференциальные уравнения и процессы управления : электрон. журн. – 2008. – № 1. – С. 1–13. – Режим доступа : <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
6. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III // Дифференциальные уравнения и процессы управления : электрон. журн. – 2008. – № 3. – С. 39–53. – Режим доступа : <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
7. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. IV<sub>1</sub> // Дифференциальные уравнения и процессы управления : электрон. журн. – 2009. – № 4. – С. 181–212. – Режим доступа : <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
8. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. IV<sub>2</sub> // Дифференциальные уравнения и процессы управления : электрон. журн. – 2010. – № 4. – С. 6–17. – Режим доступа : <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>
9. **Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.** Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
10. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. – LAP Lambert Academic Publishing, 2017. – 69 с.
11. **Андреев А.Ф., Андреева И.А.** Выявление фазовых портретов широкого семейства кубических систем в круге Пуанкаре // Sciences of Europe. – Prague (Czech Republic). – 2017. – Vol. 2, N 13 (13).
12. **Andreeva Irina, Andreev Alexey.** Investigation of a family of cubic dynamic systems // Vibro-engineering Procedia. – 2017. – Vol. 15. – P. 88–93.
13. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
14. **Andreev A.F., Andreeva I.A.** Local study of a family of planar cubic systems // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. – 2007. – Vol. 40, N 2. – P. 99–103.
15. **Андреев А.Ф., Андреева И.А., Детченя Л.В., Маковецкая Т.В., Садовский А.П.** Нильпотентные центры кубических систем // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 8. – С. 1003–1008.

Андреев Алексей Фёдорович, д-р физ.-мат. наук, почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета, заслуженный деятель науки РФ.

Андреева Ирина Алексеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

191036, г. Санкт-Петербург, ул. Дегтярная, дом 18/32, кв. 6. Тел. +7(981) 709-19-75; e-mail: irandr@inbox.ru



УДК 517.977

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОЙ РАБОТЫ СТРУКТУРНОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ НА ПРЕДПРИЯТИИ

С.А. Бельман

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

## MATHEMATICAL MODEL OF STABLE OPERATION OF A DEPARTMENT IN THE COMPANY

S.A. Belman

Рассматривается математическая модель стабильной работы структурного подразделения на предприятии. Взаимосвязь руководителя и подчиненных описана системой дифференциальных уравнений. Определены условия циклического изменения состояния системы. Рассмотрен пример системы с синусоидальной нелинейностью.

*Ключевые слова:* математическая модель, система дифференциальных уравнений.

Рассмотрим математическую модель стабильной работы малого структурного подразделения на предприятии, состоящего из одного руководителя и двух подчиненных. Пусть функция  $y_i$  – функция полезности от деятельности, производимой  $i$ -м человеком. Причем положительный коэффициент перед этой функцией ставится в случае, если работник совершает деятельность по собственной воле, и отрицательный – если по просьбе, приказу другого человека.

Количественный анализ полезности от производимой деятельности обоснуем на представлении о возможности измерения полезности в гипотетических единицах – ютилах (utility – полезность). Под полезностью понимаем все количество удовлетворения от производимой деятельности за определенный промежуток времени [2]. Общая полезность возрастает по мере отслеживания результатов деятельности, но все более медленными темпами. Такая ее динамика объясняется тем, что полезность каждой дополнительной единицы деятельности убывает, так как человек устает, теряет к однообразной деятельности интерес и др.

Работа в малой группе предполагает общение с коллегами. Пусть  $\lambda_j$  определяет восприимчивость подчиненных к внешнему воздействию со стороны коллеги (приказ руководителя подразделения, просьба коллеги). Например, восприимчивость к внешнему воздействию флегматика меньше, чем у холерика или меланхолика.

The mathematical model of stable operation of a department in the company is considered. The system of differential equations describes the relationship of the manager and subordinates. Conditions of existence of cyclic change of the system. The example of system with the sinusoidal nonlinearity is considered.

*Keywords:* mathematical model, system differential equations.

Тогда  $\dot{y}$  – темп изменения полезности от производимой деятельности  $y$ , который пропорционален производимым действиям, деятельности человека.

Под стабильной работой малого структурного подразделения предприятия понимаем циклическое изменение чувства удовлетворения от производимой человеком деятельности.

Это естественное определение исходит из колебательного режима эмоционального состояния человека, уровень эмоционального фона которого колеблется в окрестности некоторого среднего значения.

Пусть руководитель подразделения постоянно отслеживает результативность деятельности подчиненных и в момент спада результативности предпринимает меры по ее повышению.

Управленческая задача в этом случае состоит в поддержании режима стабильной работы вверенного ему подразделения предприятия. С экономической точки зрения подобная задача ставилась в работе [1].

Математическая задача состоит в определении условий стабильной работы системы.

Математическая модель стабильной работы системы, состоящей из трех объектов, может быть построена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + 3y_2 + 7y_3 + \lambda_2 y_2 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + 8y_3 + \lambda_1^2 y_1 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \dot{y}_3 &= -8y_2 - \lambda_1 y_2^3 + 2y_3 + \lambda_1 y_3 + \\ &\quad + \lambda_2 y_1 y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \end{aligned} \quad (1)$$

в которой величины  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $3y_2, 7y_3, 8y_3, -8y_2, 2y_3$  описывают пропорциональное влияние полезности от деятельности  $i$ -го субъекта на темп роста функции полезности; значения  $\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \lambda_1 y_3$  характеризуют изменение уровня полезности от производимой деятельности работников с учетом их личной восприимчивости к внешнему воздействию со стороны коллег,  $\lambda_2 y_1 y_2, -\lambda_1 y_2^3, \lambda_1^2 y_1 y_3, \lambda_2 y_2 y_3, \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3$  – дополнительные члены, которые отображают влияние сторонних просьб, приказов и действий, совершенных по собственной инициативе.

Предполагаем, что в начальный момент времени известны готовность приносить пользу на работе трех сотрудников малого структурного подразделения предприятия  $y_0 = (3, 2, 0)$  и уровень внешних воздействий  $\lambda_0 = (-2, 0)$ .

Математическая задача формулируется так: определить условия существования периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром (1).

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_1(y, \lambda) &= \lambda_1 y_1 + 3y_2 + 7y_3 + \\ &\quad + \lambda_2 y_2 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \psi_2(y, \lambda) &= \lambda_2 y_2 + 8y_3 + \lambda_1^2 y_1 y_3 + \\ &\quad + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \psi_3(y, \lambda) &= -8y_2 - \lambda_1 y_2^3 + 2y_3 + \lambda_1 y_3 + \\ &\quad + \lambda_2 y_1 y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что  $\psi_1(3, 2, 0, -2, 0) = \psi_2(3, 2, 0, -2, 0) = \psi_3(3, 2, 0, -2, 0) = 0$ .

Якобиан системы (2) в точке  $(3, 2, 0, -2, 0)$  отличен от нуля и равен  $D(3, 2, 0, -2, 0) = -640$ .

По теореме о неявной функции существует такое число  $\delta_0 > 0$ , что уравнение  $(\psi_1(y, \lambda), \psi_2(y, \lambda), \psi_3(y, \lambda)) = 0$ , заданное на множестве  $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda: \lambda, \lambda_0 \in E_p, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0\}$ , определяет в окрестности точки  $(-2, 0) \in \Lambda(\delta_0)$  единственную функцию  $y = (\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \theta_3(\lambda))$ . Для компонент этой функции

$$\begin{aligned} \theta_1(\lambda) &= 3 - \frac{1}{4}(\lambda_1 + 2) - \frac{73}{80}\lambda_2 + o(|\lambda - \lambda_0|), \\ \theta_2(\lambda) &= 2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2) - \frac{3}{8}\lambda_2 + o(|\lambda - \lambda_0|), \\ \theta_3(\lambda) &= -10\lambda_2 + o(|\lambda - \lambda_0|) \end{aligned} \quad (3)$$

верны равенства  $\psi_1(\theta(\lambda), \lambda) \equiv 0, \psi_2(\theta(\lambda), \lambda) \equiv 0, \psi_3(\theta(\lambda), \lambda) \equiv 0, y_0 = (\theta_1(\lambda_0), \theta_2(\lambda_0), \theta_3(\lambda_0))$ .

При любом фиксированном  $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$  система (1) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 3 & 7 \\ 0 & \lambda_2 & 8 \\ 0 & -8 & \lambda_1 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \theta_1(\lambda) \\ y_2 - \theta_2(\lambda) \\ y_3 - \theta_3(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 y_2 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3 \\ \lambda_1^2 y_1 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3 \\ -\lambda_1 y_2^3 + \lambda_2 y_1 y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Пусть  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}, K(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + 2 \end{pmatrix}$ .

В системе (4) введем переменные  $x_1 = y_1 - \theta_1(\lambda), x_2 = y_2 - \theta_2(\lambda), x_3 = y_3 - \theta_3(\lambda)$ , где  $\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \theta_3(\lambda)$  определены равенствами (3). В окрестности точки  $\theta(\lambda) = (\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \theta_3(\lambda))$  систему (4) представим равенством

$$\dot{x} = Ax + K(\lambda)x + o(|x|).$$

Пусть  $R(x, \lambda) = \dot{x} - Ax - K(\lambda)x + o(|x|), Bx = \dot{x} - Ax$ .

Построим оператор  $L(k)$ :

$$L(k) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & k & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & k \\ -k & 0 & 0 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что уравнение  $\det L(k) = 0$  имеет единственный неотрицательный целый корень  $k = 1$ . Жорданова форма  $L(1)$  имеет вид  $\bar{L}(1) = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 0, 0)$ .

Выберем пространства:  $E^0$  с базисом из векторов  $\text{colon}(0, 0, 0, 0, 1, 0), \text{colon}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $E^2$  с базисом  $\text{colon}(1, 0, 0, 0, 0, 0), \text{colon}(0, 1, 0, 0, 0, 0), \text{colon}(0, 0, 1, 0, 0, 0), \text{colon}(0, 0, 0, 1, 0, 0)$  и  $W_0$ , базис которого составляют векторы  $h_1 = \text{colon}(0, \sin 8t, 0), h_2 = \text{colon}(0, 0, \sin 8t)$ .

Решение системы будем искать в виде  $x(\alpha) = Px(\alpha) + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ .

Предварительно найдем векторы  $x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)$  из равенства

$$\begin{pmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \\ x_3(\alpha) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \\ x_3(\alpha) \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 8t \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin 8t \end{pmatrix}.$$

Получим  $x_1(\alpha) = Px_1(\alpha), x_2(\alpha) = Px_2(\alpha) + \alpha_1 \sin 8t, x_3(\alpha) = Px_3(\alpha) + \alpha_2 \sin 8t$ .

Рассмотрим систему операторных уравнений  $\xi_1(R(x(\alpha), \lambda)) = 0, \xi_2(R(x(\alpha), \lambda)) = 0$ , в которой

$$\xi_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x h_1 dt, \quad \xi_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x h_2 dt. \quad \text{Обозначим}$$

$\chi = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \zeta_1(R(x(\alpha), \lambda)) &= \zeta_1(Bx(\alpha)) - \\ &- \zeta_1 \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \\ x_3(\alpha) \end{pmatrix} \right) + o(|\chi|) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \begin{pmatrix} (\lambda_1 + 2)Px_1(\alpha) \\ \lambda_2(Px_2(\alpha) + \alpha_1 \sin 8t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 8t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt + o(|\chi|) = \\ &= \lambda_2 \alpha_1 + o(|\chi|), \end{aligned}$$

так как  $\zeta_1(Bx(\alpha)) = 0$ .

$$\text{Аналогично } \xi_2(R(x(\alpha), \lambda)) = (\lambda_1 + 2)\alpha_2 + o(|\chi|).$$

Таким образом, справедлива система

$$\begin{aligned} \lambda_2 \alpha_1 + o(|\chi|) &= 0, \\ (\lambda_1 + 2)\alpha_2 + o(|\chi|) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

в которой  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{o(|\chi|)}{|\chi|} = 0$ .

Положим  $\alpha = \rho e$ ,  $\rho > 0$ ,  $e = (e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2})$ ,  $\alpha_1 = \rho e_{\alpha_1}$ ,  $\alpha_2 = \rho e_{\alpha_2}$ ,  $\lambda_1 + 2 = \lambda_3$ . Тогда систему (5) запишем в виде  $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha_1} \\ e_{\alpha_2} \end{pmatrix} + o(|\chi|) = 0$ , где

$\bar{\chi} = (\rho, \lambda_2, \lambda_3)$ . Зафиксируем  $e^* = (1, 1)$ . Система примет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + o(|\bar{\chi}|) = 0$ .

Обозначим  $\bar{\lambda} = \text{colon}(\lambda_2, \lambda_3)$ . Выразим из последнего равенства  $\bar{\lambda}$ :  $\bar{\lambda} = -o(|\bar{\chi}|)$ . Определим оператор  $\Gamma \bar{\lambda} = -o(|\bar{\chi}|)$ . Из условия  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{o(|\bar{\chi}|)}{(|\bar{\chi}|)} = 0$

следует существование такого  $\delta > 0$ , что при  $|\bar{\chi}| \leq \delta$   $|o(|\bar{\chi}|)| < \delta$ . Отсюда при любом фиксиро-

ванном  $|\bar{\chi}| \leq \delta$   $|\Gamma \bar{\lambda}| < \delta$ . Значит, оператор  $\Gamma$  отображает замкнутое, выпуклое, ограниченное множество  $|\bar{\chi}| \leq \delta$  в себя. Следовательно, по теореме Боля – Брауэра у оператора  $\Gamma$  на этом множестве существует неподвижная точка  $\Gamma \bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}^*$ ,  $\bar{\lambda}^* = (\lambda_3^*, \lambda_2^*)$  при произвольно фиксированном  $\rho^* (|\rho^*| < \delta)$ , что доказывает существование решения  $x^*(\alpha^*) = Px(\alpha^*) + \alpha_1^* h_1 + \alpha_2^* h_2$  системы (4) или

$$\begin{aligned} x_1^*(\alpha^*) &= Px_1^*(\rho^*), \\ x_2^*(\alpha^*) &= Px_2^*(\rho^*) + \rho^* \sin 8t, \\ x_3^*(\alpha^*) &= Px_3^*(\rho^*) + \rho^* \sin 8t, \end{aligned}$$

так как  $\alpha_1^* = \rho^* e_{\alpha_1}^*$ ,  $\alpha_2^* = \rho^* e_{\alpha_2}^*$ ,  $e_{\alpha_1}^* = 1$ ,  $e_{\alpha_2}^* = 1$ .

Возвращаясь к старым переменным при  $Px(\alpha) = o(\varepsilon)$ , получим

$$\begin{aligned} y_1^* &= 3 - \frac{1}{4}(\lambda_1^* + 2) - \frac{73}{80} \lambda_2^* + o(|\lambda^* - \lambda_0|) + o(\varepsilon), \\ y_2^* &= \rho^* \sin 8t + 2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^* + 2) - \frac{3}{8} \lambda_2^* + o(|\lambda^* - \lambda_0|) + o(\varepsilon), \\ y_3^* &= \rho^* \sin 8t - 10 \lambda_2^* + o(|\lambda^* - \lambda_0|) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $\lambda_1^* = \lambda_3^* - 2$ .

Таким образом, исследование позволяет определить:

– условия стабильной работы малого структурного подразделения некоторого предприятия, состоящего из трех человек, функционирование которого происходит в соответствии с математической моделью (1);

– границы параметров, характеризующих индивидуальные особенности к восприимчивости внешних управляющих воздействий, при которых малая социальная группа развивается стабильно.

Аналогично может быть исследована математическая модель функционирования социальной группы с конечным числом работников, включенных в нее.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бельман С.А.** Математическая модель стабильного развития многосекторной экономики // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2008. – Вып. 24. – С. 124–127.
2. **Лискина Е.Ю.** Экономико-математические модели. – Рязань : Изд-во РГУ имени С.А. Есенина, 2009. – 110 с.

Бельман Светлана Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 97-15-25, e-mail: sabelman@rsu.edu.ru

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНОЙ РЕШЕТКОЙ СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ

И.М. Буркин

Тульский государственный университет

## DYNAMICAL SYSTEMS WITH AN INFINITE LATTICE OF HIDDEN ATTRACTORS

I.M. Burkin

Рассматривается смещаемый по переменным четырехмерный хаотический динамический поток, обладающий единственным состоянием равновесия. Этот поток используется для генерирования систем с периодическими нелинейностями, которые репродуцируют 2-D и 3-D бесконечные решетки идентичных скрытых аттракторов.

*Ключевые слова:* динамическая система, хаос, мультистабильность, скрытый аттрактор, клонирование аттракторов, ляпуновские показатели, размерность Каплана – Йорке.

**Введение.** Мультистабильность реальной динамической системы может создать угрозу в практических инженерных приложениях, поскольку поведение системы не может быть однозначно гарантировано. Мультистабильная система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий. По этой причине в последнее время изучению мультистабильных систем посвящено большое число работ [1–8]. С другой стороны, изучение мультистабильности оказывается, например, полезным для понимания механизмов памяти, а ее использование в системах коммуникаций может повысить производительность защищенной связи, когда хаос применяется для скрытия информации.

Недавно в серии работ [11–13] был рассмотрен класс динамических систем, названных системами, допускающими смещение сдвигом по переменным (offset boostable dynamical system). Особенностью этих систем является возможность такого преобразования сдвига ее координат (смещения), которое меняет положение аттракторов системы в ее фазовом пространстве, не меняя в то же время характер ее динамики. К таким системам относятся, в частности, «системы толчка» (jerk systems) и системы «гипертолчка» (hyperjerk systems). Отличительная особенность таких систем состоит в возможности их трансформации в системы, обладающие бесконечной решеткой сосуществующих аттракторов путем введения в рассматриваемые системы тригонометрических

Four-dimensional offset-boostable chaotic dynamic flow that have one equilibrium states are considered. These flows are used to generate systems with periodic nonlinearities that reproduce the 2-D and 3-D infinite lattices of identical hidden attractors.

*Keywords:* dynamic system, chaos, multistability, hidden attractor, cloning of attractors, Lyapunov exponents, Kaplan – York dimension.

функций. Напомним, что аттрактор системы называют самовозбуждающимся (self-excited attractor), если любая окрестность некоторого состояния равновесия системы пересекается с областью его притяжения, в противном случае аттрактор называется скрытым (hidden attractor) [14]. В работах [11, 12] построены трехмерные системы, обладающие 2-D решеткой самовозбуждающихся аттракторов. В работе [13] на базе четырехмерной системы, допускающей смещение сдвигом, также построена система с 3-D решеткой самовозбуждающихся гиперхаотических аттракторов, а также система без состояний равновесия, обладающая четырехмерной решеткой скрытых аттракторов.

Цель настоящей работы – продемонстрировать возможность использования четырехмерных систем, допускающих смещение сдвигом по переменным и обладающих единственным устойчивым состоянием равновесия для генерирования систем с периодическими нелинейностями, производящими 2-D и 3-D решетки идентичных скрытых аттракторов с одинаковыми показателями Ляпунова и размерностями Каплана – Йорке.

**Системы, допускающие смещение фазового потока.** Идея конструирования систем с бесконечной сетью идентичных аттракторов, опирающаяся на использование систем, допускающих сдвиг по переменной (variable-boostable system), была предложена в работе [11]. Системами, допускающими сдвиг по переменной, названы динамические системы

$$\dot{X} = F(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_{i,\dots}, x_n),$$

в которых замена переменной  $x_i$  на  $x_i + c$  при подходящем выборе значения постоянной  $c$  не меняет динамику остальных переменных в исходном фазовом пространстве. Хорошо известным примером систем, допускающих сдвиг по переменной, являются так называемые фазовые системы вида  $\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma)$ ,  $\dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma)$ , где  $A$  – матрица размером  $n \times n$ ,  $b$  и  $c$  –  $n$ -векторы,  $\varphi(\sigma)$  –  $\Delta$ -периодическая функция,  $\rho$  – число. Поскольку в цилиндрическом фазовом пространстве  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma \bmod \Delta)\}$  динамический поток системы не меняется при замене  $\sigma$  на  $\sigma + k\Delta$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), то в накрывающем пространстве  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma)\}$  такая замена влечет за собой сдвиг фазового потока на  $k\Delta$  в направлении оси  $\sigma$ , не меняя при этом динамику остальных переменных. Если фазовая система имеет аттрактор, целиком расположенный в «полосе»

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma : x_i \in (-\infty, \infty), \sigma \in (\sigma_0, \sigma_0 + \Delta)\},$$

то она имеет бесконечное число идентичных аттракторов-клонов.

В работах [12, 13] рассмотрен другой класс систем, позволяющих производить смещение фазового потока путем сдвига по переменным (offset boostable systems). Речь идет о системах каскадного типа, полученных из систем толчка и гипертолчка. Система гипертолчка описывается уравнением

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(\frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx}{dt}, x\right), \quad n \geq 4. \quad (1)$$

При  $n=3$  это система толчка. В случае  $n=4$  система (1) может быть трансформирована в систему каскадного типа, допускающую 3-D сдвиг по переменным, путем введения трех новых переменных  $y, z, u$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= u, \\ \dot{u} &= f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x). \end{aligned} \quad (2)$$

Сдвиг по переменным  $y, z$  и  $u$  в системе (2) может быть осуществлен путем введения дополнительных констант в ее первые три уравнения. В самом деле, заменяя  $x \rightarrow \tilde{x}$ ,  $y \rightarrow \tilde{y} + m$ ,  $z \rightarrow \tilde{z} + n$ ,  $u \rightarrow \tilde{u} + p$  приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{y} + m, \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{z} + n, \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{u} + p, \\ \dot{\tilde{u}} &= f(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}, \tilde{x}). \end{aligned} \quad (3)$$

Легко видеть, что выполненное преобразование системы осуществляет смещение фазового потока системы (2) по переменным  $y, z, u$ , оставляя неизменной динамику переменной  $\tilde{x} = x$ , поскольку

динамика этой переменной подчиняется тому же самому уравнению (1). Очевидно, сдвиг можно осуществить отдельно по любой из указанных переменных или по любой паре из них.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\ddot{x} - 3\dot{x} - x - e^{\dot{x}} - 2\ddot{x}e^{-(\dot{x})^2} + 1.$$

Соответствующая ему система каскадного типа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= u, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{u} = -x - 3y - u - e^z - 2ze^{-z^2} + 1.$$

Эта система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия  $(0, 0, 0, 0)$  типа седло-фокус с собственными значениями матрицы линеаризации  $(-0.515 \pm 2.365i, 0.015 \pm 0.413i)$  и самовозбуждающийся из окрестности состояния равновесия аттрактор, представленный на рисунке 1. На рисунке 2 представлен этот аттрактор и его сдвиги по переменным  $y$  и  $u$ .

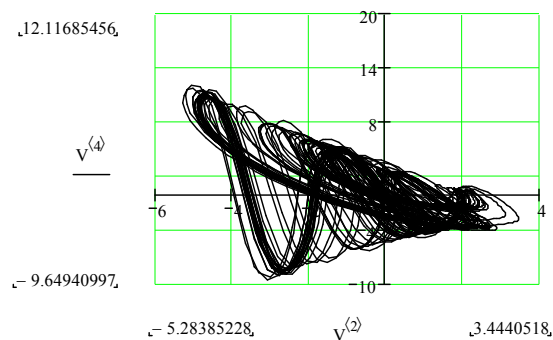


Рис. 1. Самовозбуждающийся аттрактор системы (4)

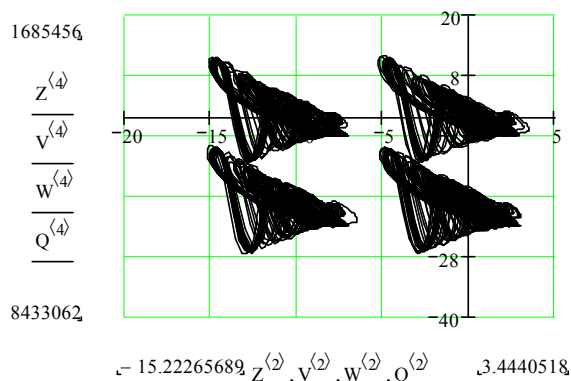


Рис. 2. Сдвиги аттрактора системы (4) смещением по переменным

Ниже будет продемонстрировано, каким образом путем введения в систему (4) периодических функций могут быть построены динамические системы, обладающие 2-D или 3-D решеткой скрытых хаотических аттракторов-клонов.

**Построение 2-D решетки скрытых аттракторов.** Заменяем в системе (4) переменные  $y, u$  на периодические функции  $F(y) = a \sin(by)$ ,  $G(u) = c \sin(mu)$  и подберем значения параметров  $a, b, c, m$  так, чтобы новая система имела устойчивое в малом состояние равновесия  $(0, 0, 0, 0)$  и хаотический аттрактор, который, очевидно, будет скрытым. Характеристический полином матрицы Якоби новой системы в точке  $(0, 0, 0, 0)$  имеет вид  $r(p) = p^4 + ctp^3 + 3ctp^2 + 3abctp + abct$ . Полином  $r(p)$  будет полиномом Гурвица, например, при  $a = 2.1, b = 1/2, c = 5, m = 1/3$ . При этом система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2.1 \sin\left(\frac{y}{2}\right), \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 5 \sin\left(\frac{u}{3}\right), \\ \dot{u} &= -x - 6.3 \sin\left(\frac{y}{2}\right) - 5 \sin\left(\frac{u}{3}\right) - e^z - 2ze^{-z^2} + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

имеет скрытый хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями  $\Lambda_1 = 0.018, \Lambda_2 = 0.000, \Lambda_3 = -0.055, \Lambda_4 = -1.354$  и размерностью Каплана – Йорке  $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3|^{-1} = 2.296$ . Проекция этого аттрактора на плоскость  $(y, u)$  представлена на рисунке 3.

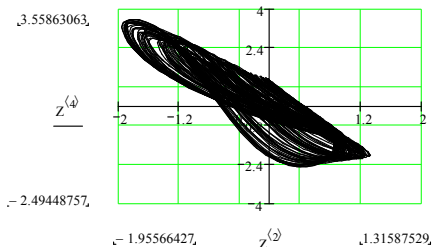


Рис. 3. Проекция скрытого аттрактора системы (5) на плоскость  $(y, u)$

Замена в системе (4) переменных  $y, u$  на периодические функции обеспечивает существование в фазовом пространстве системы (5) бесконечной 2-D решетки скрытых хаотических аттракторов-клонов с идентичными характеристиками – ляпуновскими показателями и размерностью Каплана – Йорке. Шесть аттракторов-клонов, полученных сдвигом аттрактора, представленного на рисунке 3 на периоды  $\pm 4\pi$  и  $\pm 6\pi$  по осям  $Oy$  и  $Ou$  соответственно, представлены на рисунке 4.

**Построение 3-D решетки скрытых аттракторов.** Так как система (4) допускает смещение фазового потока по переменным  $y, z$  и  $u$ , то можно попытаться заменить эти переменные на функции, периодические по переменным  $y, z$  и  $u$  так,

чтобы новая система имела бесконечную 3-D решетку идентичных скрытых аттракторов.

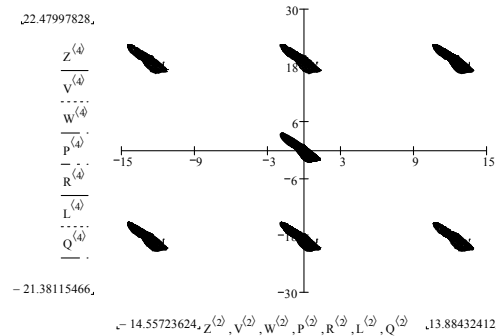


Рис. 4. 2-D решетка скрытых аттракторов системы (5)

Путем целенаправленного компьютерного поиска реализовать описанный сценарий удалось в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tan(y), \\ \dot{y} &= \tan(z), \\ \dot{z} &= 1.15 \tan(u), \\ \dot{u} &= -x - 3 \tan(y) - 1.15 \tan(u) - e^{\tan(z)} - 2 \tan(z) e^{-(\tan(z))^2} + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрица линеаризации системы (6) в состоянии равновесия  $(0, 0, 0, 0)$  имеет собственные значения  $(-0.011 \pm 1.746i, -0.564 \pm 0.242i)$ , поэтому все ее состояния равновесия асимптотически устойчивы в малом. Решение с начальным условием  $(-0.1, 0.6, 0, -0.1)$  находится в области притяжения скрытого хаотического аттрактора с ляпуновскими показателями  $\Lambda_1 = 0.164, \Lambda_2 = -0.139, \Lambda_3 = -0.229, \Lambda_4 = -2.944$  и размерностью Каплана – Йорке  $D_{KY} = 2.107$ . Проекция этого аттрактора на плоскости  $(z, u)$  и  $(y, z)$  представлены на рисунках 5 и 6.

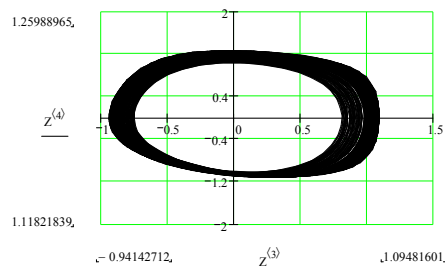


Рис. 5. Проекция аттрактора на плоскость  $(z, u)$

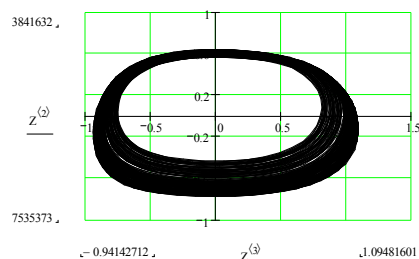


Рис. 6. Проекция аттрактора на плоскость  $(y, z)$

На рисунках 7 и 8 представлены аттракторы-клоны, полученные сдвигом на периоды  $\pm\pi$  по осям  $Oz$  и  $Ou$  и  $Oy$  и  $Oz$

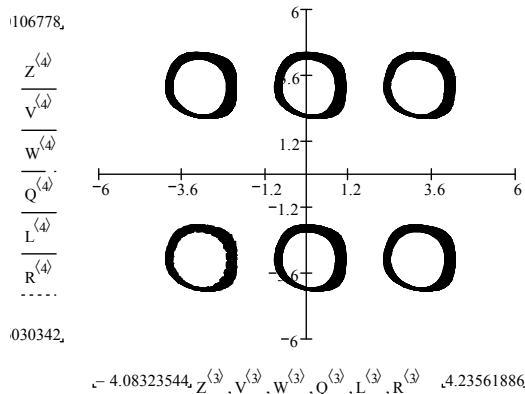


Рис. 7. Проекция аттракторов-клонов на плоскость  $(z, u)$

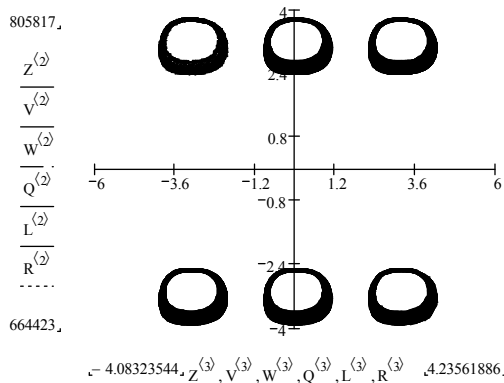


Рис. 8. Проекция аттракторов-клонов на плоскость  $(y, z)$

**Заключение.** В настоящей работе построены четырехмерные динамические системы, обладающие бесконечными 2-D и 3-D решетками скрытых идентичных хаотических аттракторов. Введение периодических функций в системы, допускающие смещение фазового потока, является эффективным средством преобразования такой системы в новую систему, порождающую многомерные решетки идентичных аттракторов-клонов. Как показано в работе [13], такая процедура может быть реализована не только для систем каскадного типа, но и для систем более общего вида. Однако для систем более общего вида аттракторы, репродуцируемые в различных измерениях, уже могут не быть идентичными. Введенные периодические функции, взаимодействуя друг с другом, могут существенно менять динамику аттракторов в различных измерениях. Заметим, что уравнение системы автоматического регулирования с одной скалярной нелинейностью, которое в операторной форме имеет вид  $\sigma = -m(p)(n(p))^{-1}\varphi(\sigma)$ , где  $m(p)$  и  $n(p)$  полиномы,  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\varphi(\sigma)$  – достаточно гладкая функция, может быть записано в виде уравнения (1) относительно переменной  $\sigma$ . Поэтому есть основания предполагать, что путем введения периодических функций в систему уравнений, моделирующую систему автоматического регулирования и обладающую нетривиальным аттрактором, всегда можно получить систему, порождающую 1-D, 2-D, ..., (n-1)-D сети идентичных аттракторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Li C., Sprott J.C.** Multistability in the Lorenz system: a broken butterfly // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2014. – V. 24 (10): 1450131.
2. **Li C., Hu W., Sprott J.C., Wang X.** Multistability in symmetric chaotic systems // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* – 2015. – V. 224. – P. 1493–1506.
3. **Bao B., Li Q., Wang N., Xu Q.** Multistability in Chua's circuit with two stable node-foci // *Chaos.* – 2016. – V. 26 (4): 043111.
4. **Xu Q., Lin Y., Bao B., Chen M.** Multiple attractors in a non-ideal active voltage-controlled memristor based Chua's circuit // *Chaos Solitons Fract.* – 2016. – V. 83. – P. 186–200.
5. **Lai Q., Chen S.** Research on a new 3-D autonomous chaotic system with coexisting attractors // *Optik.* – 2016. – V. 127. – P. 3000–3004.
6. **Lai Q., Chen S.** Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2016. – V. 26: 1650177.
7. **Ujjwal S.R., Punetha N., Ramaswamy R., Agrawal M., Prasad A.** Driving-induced multistability in coupled chaotic oscillators: symmetries and riddled basins // *Chaos.* – 2016. – V. 26: 063111.
8. **Буркин И.М.** Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // *Чебышевский сборник.* – 2017. – Т. 18, № 4. – С. 127–138.
9. **Zeng Z., Huang T., Zheng W.** Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function // *IEEE Trans. Neural Netw.* – 2010. – V. 21. – P. 1371–1377.
10. **Liu H., Kadir A., Li Y.** Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys // *Optik.* – 2016. – V. 127. – P. 7431–7438.
11. **Li C., Sprott J.C., Hu W., Xu Y.** Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2017. – V. 27 (10): 1750160 i.
12. **Li C., Sprott J.C., Mei Y.** An infinite 2-D lattice of strange attractors // *Nonlinear Dynamics.* – 2017. – V. 89, N 4. – P. 2629–2639.
13. **Li C., Sprott J.C., Kapitaniak T., Lu T.** Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors //

- Chaos, Solitons and Fractals. – 2018. – V. 109. – P. 76–82.
14. **Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagitsev V.I.** Localization of hidden Chua's attractors // Phys Lett. A. – 2011. – V. 375. – P. 2230–2233.

Буркин Игорь Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета.  
300012, г. Тула, пр. Ленина, 92.  
Тел.: +7 (4872) 35-34-44; e-mail: i-burkin@yandex.ru



УДК 517.95

## ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ ПАРАШЮТИСТА

И.Ю. Клочкова, Д.Г. Мельников

Рязанское гвардейское воздушно-десантное командное училище  
имени генерала армии В.Ф. Маргелова

## DYNAMIC SYSTEM, DESCRIBING MOVEMENT OF THE PARACHUTIST

I.U. Klochkova, D.G. Melnikov

Рассматривается динамическая система, описывающая четвертый этап движения парашютиста с момента отделения от самолета – этап снижения на раскрытом парашюте. Проведено исследование системы на наличие состояний равновесия. Построены фактическая и теоретическая траектории прыжка парашютиста.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения, описывающие изменение скорости парашютиста, состояние равновесия, дифференциальные уравнения, описывающие траекторию парашютиста.

Основываясь на рекомендациях, предложенных в литературе, а также на экспериментальных данных, полученных в результате прыжка, строим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение скорости парашютиста в пространстве  $OXYZ$

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 V_y \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + k_3 V_z (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $V_x$  – скорость парашютиста по координате  $x$ ,  $V_y$  – скорость парашютиста по координате  $y$ ,  $V_z$  – скорость парашютиста по координате  $z$ , коэффициенты  $a_1, k_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  определяются этапом прыжка, характеристиками парашюта, начальными условиями движения парашютиста [1, 2].

Для системы (1) ставится задача определить состояния равновесия, определить координаты приземления.

С помощью программы GPS Logger, установленной на мобильное устройство парашютиста, получены результаты измерения прыжка парашютиста. С помощью полученных данных сформирован массив, отображающий зависимость трех координат от времени. В пакете прикладных программ Maple на основании обработанных данных

We consider a dynamic system describing the motion of the fourth stage of the parachutist after separation from the aircraft – he stage of descent on the open parachute. We investigate the obtained system for the existence of equilibrium states. The actual and theoretical trajectories of the parachutist jump are constructed.

*Keywords:* differential equations that describe the free fall, the state of equilibrium, differential equations that describe the trajectories of the parachutist.

построена траектория движения парашютиста (рис. 1).

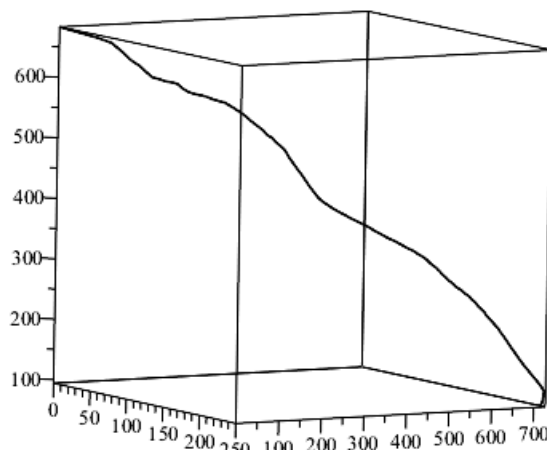


Рис. 1. Траектория прыжка парашютиста

С помощью регрессионного анализа получим коэффициенты системы (1)

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,469 - 0,039 \cdot V_x \sqrt{V_x^2 + V_z^2}, \\ \dot{V}_y = 1,621 - 0,24 \cdot V_y, \\ \dot{V}_z = -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \sqrt{V_x^2 + V_z^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Исследуем систему (2) на наличие состояний равновесия, для этого приравняем правые части системы к нулю:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = P(V_x, V_y, V_z) = 0, \\ \dot{V}_y = Q(V_x, V_y, V_z) = 0, \\ \dot{V}_z = M(V_x, V_y, V_z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим подсистему (2.1)

$$\dot{V}_y = 1,621 - 0,24 \cdot V_y. \quad (2.1)$$

Так как  $V_y = \dot{y}(t)$ , то система (2.1) примет вид

$$\ddot{y}(t) = 1,621 - 0,24 \cdot V_y. \quad (2)$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого имеет вид

$$y(t) = c_1^* + c_2^* e^{-0,24t}, \quad (2.2)$$

где  $c_1^*, c_2^* \in R$ .

Таким образом, получили зависимость координаты  $y$  от времени в явном виде.

Теперь найдем состояние равновесия подсистемы (2.1)

$$1,621 - 0,24 \cdot V_y = 0 \Rightarrow V_y = \frac{1,621}{0,24} \approx 6,75. \quad (3.1)$$

Таким образом, получили, что скорость парашютиста по координате  $y$  стремится  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 6,75 \text{ м/с}$ .

Рассмотрим подсистему (2.2)

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,469 - 0,039 \cdot V_x \sqrt{V_x^2 + V_z^2}, \\ \dot{V}_z = -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \sqrt{V_x^2 + V_z^2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Исходя из системы (3), получим

$$\begin{cases} 0,469 - 0,039 \cdot V_x \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = 0, \\ -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Решения системы (3.2) определим численными методами с использованием пакета прикладных программ Maple. Основываясь на полученных данных, составим таблицу состояний равновесия (табл. 1).

Таблица 1

$i \backslash \lambda$	$A_1(V_x, V_z)$	$A_2(V_x, V_z)$	$A_3(V_x, V_z)$
$\lambda_{1i}$	-1,0957	-0,7696	-0,4148
$\lambda_{2i}$	0,9709	0,4549	-0,28102

Проанализируем полученные состояния равновесия. Найдем частные производные функций  $Q, M$ :

$$P'_{V_x} = a_1 \frac{2V_x^2 + V_z^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; P'_{V_z} = \frac{a_1 V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}};$$

$$M'_{V_x} = \frac{k_3 V_z V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; M'_{V_z} = b_3 + k_3 \frac{V_x^2 + 2V_z^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}.$$

Составим матрицу на основе полученных частных производных

$$B = \begin{pmatrix} P'_{V_x} & P'_{V_z} \\ M'_{V_x} & M'_{V_z} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Найдем собственные значения матрицы  $B$  (табл. 2).

Таблица 2

$i \backslash \lambda$	$A_1(V_x, V_z)$	$A_2(V_x, V_z)$	$A_3(V_x, V_z)$
$\lambda_{1i}$	-1,0957	-0,7696	-0,4148
$\lambda_{2i}$	0,9709	0,4549	-0,28102

Основываясь на значениях  $\lambda$  из таблицы 2, можем сделать вывод о том, что устойчивым, а значит, и практически значимым состоянием равновесия является  $A_3(V_x, V_z)$ . Отсюда  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 2,17 \text{ м/с}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -4,959 \text{ м/с}$ .

Получим, что результирующая скорость по трем координатам  $u$  парашютиста стремится к  $8,65 \text{ м/с}$ , реальная скорость в момент приземления парашютиста была  $5,7 \text{ м/с}$ . Если обратиться к литературе, касающейся данного вопроса, то встретим утверждение о том, что скорость приземления парашютиста равна приблизительно  $5 \text{ м/с}$  [3]. Расхождения в реальной скорости и теоретической могут возникнуть в связи с неучтенными внешними воздействиями, такими как ветер и др.

Теперь определим координаты приземления. Преобразуем систему дифференциальных уравнений (1) в систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = c_1 + a_1 \dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}, \\ \ddot{y} = c_2 + b_2 \dot{y}, \\ \ddot{z} = c_3 + b_3 \dot{z} + k_3 \dot{z} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (4)$$

или на основании (2), (2.3)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0,469 - 0,039 \cdot \dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}, \\ y(t) = c_1^* + c_2^* e^{-0,24t}, \\ \ddot{z} = -2,917 - 0,758 \cdot \dot{z} + 0,032 \cdot \dot{z} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (5)$$

С помощью пакета прикладных программ Maple представим систему (5) в виде массива данных. Построим теоретическую траекторию на основании данных из массива и сравним с практической траекторией (рис. 2).

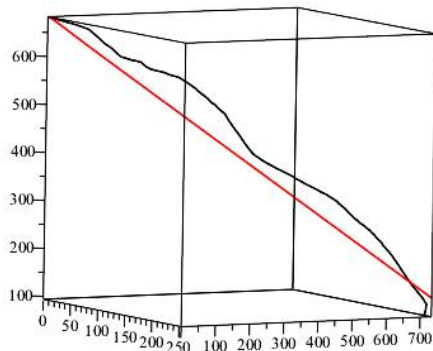


Рис. 2. Фактическая и теоретическая траектории прыжка парашютиста

Для полного анализа рассчитаем индекс корреляции для каждой из координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (фактической и теоретической). Получили индекс корреляции для  $x - 0,99$ , для  $y - 0,46$ , для  $z - 0,93$  [4]. Расстояние между фактической и теоретической точками приземления составило 40 м. Можем сделать вывод о том, что выбранная модель является достаточно приближенной к описанию траектории прыжка парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Клочкова И.Ю.** Математическая модель плоского движения тяжелой точки // Вестник РАЕН. – 2016. – № 3. – С. 28–33.
2. **Клочкова И.Ю.** Исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей этап снижения на раскрытом парашюте // Вестник РАЕН. – 2017. – № 4. – С. 26–30.
3. **Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т.** Парашютные системы. – М. : Физматлит, 2009. – 506 с.
4. **Елисева И.И.** Эконометрика. – М. : Изд-во Юрайт, 2016. – 449 с.

Клочкова Ирина Юрьевна, преподаватель кафедры математических и естественно-научных дисциплин РГВВДКУ. 390000, г. Рязань, площадь генерала армии В.Ф. Маргелова, д. 1; аспирантка кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. 390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 906 548-59-35; e-mail: i-usacheva@mail.ru  
Мельников Дмитрий Геннадьевич, старший преподаватель кафедры воздушно-десантной подготовки РГВВДКУ. 390000, г. Рязань, площадь генерала армии В.Ф. Маргелова, д. 1.

# ГЛАДКОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Конёнков

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

## SMOOTHNESS OF THE MODIFIED SIMPLE LAYER POTENTIAL FOR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

A.N. Kononkov

В пространстве размерности больше двух рассматривается равномерно эллиптический оператор, коэффициенты которого удовлетворяют условию Гёльдера. При условии, что для оператора существует главное фундаментальное решение, вводится модифицированный потенциал простого слоя в области с компактной границей, удовлетворяющей условию Ляпунова. Ядром потенциала является указанное фундаментальное решение, умноженное на некоторую функцию, не обращающуюся в ноль на границе области. Показано, что при определенном выборе такой функции гладкость модифицированного потенциала простого слоя в шкале пространств Гёльдера может быть на единицу выше, чем гладкость потенциала простого слоя при плотности из того же класса, а также на единицу выше, чем гладкость границы области.

*Ключевые слова:* эллиптическое уравнение второго порядка, потенциал простого слоя, пространства Гёльдера.

Свойства потенциала простого слоя для уравнения Лапласа подробно исследованы в [1]. В частности, изучена гладкость потенциала в пространствах Гёльдера. Показано, что для ограниченной области  $Q \subset \mathbb{R}^n$  с границей, удовлетворяющей условию Ляпунова  $S \in C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  и плотности  $\varphi \in C^\alpha(S)$ , потенциал простого слоя  $U\varphi$  принадлежит пространству  $C^{1,\alpha'}(\bar{Q})$ , где  $0 < \alpha' < \alpha$ . Для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами в [2] установлено, что при наложенных условиях на границу области и плотность  $U\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{Q})$ .

В данной работе рассматривается равномерно-эллиптическое уравнение с гёльдеровыми коэффициентами. Предполагается, что для оператора существует главное фундаментальное решение либо это оператор Лапласа. Область  $Q$  может быть как ограниченной, так и неограниченной, ее граница предполагается компактной. Исследуется гладкость модифицированного потенциала простого слоя в пространствах Гёльдера. От классического потенциала простого

In a space of dimension greater than two a uniformly elliptic operator whose coefficients satisfy the Hölder condition is considered. Provided that for the operator there exists a principal fundamental solution, a modified potential of a simple layer in a region with a compact boundary satisfying the Lyapunov condition is introduced. The kernel of the potential is the fundamental solution multiplied by some function that does not vanish on the boundary of the domain. It is shown that for a certain choice of such function the smoothness of the modified simple layer potential in the scale of Hölder spaces can be one step higher than the smoothness of the simple-layer potential with a density from the same class, and also one step higher than the smoothness of the domain's boundary.

*Keywords:* elliptic equations of the second order, simple layer potential, Hölder spaces.

слоя он отличается тем, что ядром является фундаментальное решение, умноженное на некоторую не обращающуюся в ноль на границе области функцию, зависящую как от эллиптического оператора, так и от границы области. Из полученных результатов вытекает (см. следствие 3), что если  $S \in C^{2,\alpha}$  и  $\varphi \in C^{1,\alpha}(S)$ , то потенциал простого слоя  $U\varphi$  для эллиптического оператора с гёльдеровыми коэффициентами не будет, вообще говоря, принадлежать пространству  $C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ . Устанавливается, что если домножить фундаментальное решение на указанную функцию, то гладкость полученного потенциала будет выше, а именно, что он будет принадлежать  $C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ , даже если граница области  $S \in C^{1,\alpha}$ .

Пусть  $Q$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , где  $n \geq 3$ . Обозначим через  $S$  ее границу,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  вектор единичной внутренней нормали к  $S$ .

В области  $Q$  для  $\alpha \in (0, 1)$  будем рассматривать пространства Гёльдера  $C^{k,\alpha}(\bar{Q})$ ,  $k = 0, 1, 2$ , функций  $f$  непрерывных в  $\bar{Q}$  вместе

со своими производными до  $k$ -го порядка включительно с нормами

$$\begin{aligned} \|f, Q\|^{(0,\alpha)} &= \sup_{x \in Q} |f(x, t)| + \\ &+ \sup_{x, x+\Delta x \in Q} \left| (f(x+\Delta x) - f(x)) |\Delta x|^{-\alpha} \right|, \\ \|f, Q\|^{(1,\alpha)} &= \sup_{x \in Q} |f(x, t)| + \sum_{l=1}^n \|\partial_l f, Q\|^{(0,\alpha)}, \\ \|f, Q\|^{(2,\alpha)} &= \sup_{x \in Q} |f(x, t)| + \sum_{l=1}^n \|\partial_l f, Q\|^{(1,\alpha)}, \end{aligned}$$

а также пространство непрерывных и ограниченных в  $\bar{Q}$  функций  $C(\bar{Q})$  с нормой

$$\|f, Q\|^0 = \sup_{x \in \bar{Q}} |f(x)|.$$

В  $R^n$  будем рассматривать эллиптический оператор

$$L = a_{ij}(x)\partial_{ij} + b_i(x)\partial_i + c(x), \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$(\exists \delta > 0) \quad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta |\xi|^2 \quad \forall x, \xi \in R^n, \quad (2)$$

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(R^n). \quad (3)$$

Зафиксируем число  $T > 1$ . В слое  $D = R^n \times [0, T]$  сопоставим оператору  $L$  параболический оператор

$$L = \partial_t - L = \partial_t - a_{ij}(x)\partial_{ij} - b_i(x)\partial_i - c(x). \quad (4)$$

В слое  $D$  рассмотрим область  $\Omega = Q \times (0, T)$  и обозначим через  $\Sigma = S \times [0, T]$  ее боковую границу.

В области  $\Omega$  для  $\alpha \in (0, 1)$  будем рассматривать анизотропные пространства Гёльдера  $C^{i,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $i = 0, 1, 2$  с нормами

$$\begin{aligned} \|f, \Omega\|^{(0,\alpha)} &= \sup_{(x,t) \in \Omega} |f(x, t)| + \\ &+ \sup_{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega} \left| (f(x+\Delta x, t+\Delta t) - f(x, t)) \times \right. \\ &\quad \left. \times (|\Delta x|^\alpha + |\Delta t|^{\alpha/2})^{-1} \right|, \\ \|f, \Omega\|^{(1,\alpha)} &= \sup_{(x,t) \in \Omega} |f(x, t)| + \\ &+ \sup_{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega} \left| (f(x, t+\Delta t) - f(x, t)) |\Delta t|^{-(1+\alpha)/2} \right| + \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \|\partial_l f, \Omega\|^{(0,\alpha)}, \\ \|f, \Omega\|^{(2,\alpha)} &= \\ &= \sup_{(x,t) \in \Omega} |f(x, t)| + \sum_{l=1}^n \|\partial_l f, \Omega\|^{(1,\alpha)} + \|\partial_t f, \Omega\|^{(0,\alpha)}, \end{aligned}$$

а также их подпространства  $C^{i,\alpha}(\bar{\Omega})$ :

$$C^{i,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^{i,\alpha} \mid f|_{t=0} = 0\}, \quad i = 0, 1,$$

$$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^{2,\alpha} \mid f|_{t=0} = \partial_t f|_{t=0} = 0\}.$$

Для положительно определенной симметричной матрицы  $a = (a_{ij})$  через  $a^{-1} = (a_{ij}^{-1})$  обозначим обратную к ней матрицу.

Рассмотрим функцию  $H^0(x, a)$ :

$$H^0(x, a) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n \det^{1/2} a} |a_{ij}^{-1} x_i x_j|^{(2-n)/2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_n$  — площадь  $n$ -мерной сферы единичного радиуса. Функция  $H^0(x, a)$  при  $x \neq 0$  является решением уравнения  $a_{ij}\partial_{ij}H^0(x, a) = 0$ .

**Определение.** Функция  $H(x, \xi)$  называется фундаментальным решением [3] для оператора  $L$ , если как функция  $x$  для фиксированного  $\xi$   $H(x, \xi)$  при  $x \neq \xi$  удовлетворяет уравнению  $LH^0(x, \xi) = 0$  и для любого компакта  $K$  и  $x, \xi \in K \quad \exists C > 0$

$$|D_x^k [H(x, \xi) - H^0(x - \xi, a(\xi))]| \leq C |x - \xi|^{2+\alpha-n-|k|}, \quad |k| \leq 2.$$

**Определение.** Главным фундаментальным решением  $H(x, \xi)$  оператора  $L$  называется [3] фундаментальное решение, экспоненциально убывающее при  $|x - \xi| \rightarrow \infty$ :

$$|H(x, \xi)| \leq C |x - \xi|^{2-n} \exp\{-c|x - \xi|\}. \quad (6)$$

Для непрерывной и ограниченной плотности  $\varphi$  будем рассматривать потенциал простого слоя

$$U\varphi(x) = \int_S H(x, y)\varphi(y)ds.$$

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 3$ , коэффициенты оператора  $L$  удовлетворяют условиям (2), (3),  $c \leq 0$ , граница  $S$  области  $Q$  удовлетворяет условию Ляпунова  $S \in C^{1,\alpha}$  и компактна. Пусть либо у оператора  $L$  существует главное фундаментальное решение  $H(x, \xi)$ , либо  $L = \Delta$ . Тогда существует положительная функция  $(\exists \delta > 0) \quad \psi(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in S$ ,

такая, что модифицированный потенциал простого слоя

$$\hat{U}\varphi(x) = \int_S H(x, y)\psi(y)\varphi(y)dy$$

является ограниченным оператором из  $C^{1,\alpha}(S)$  в  $C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ , то есть

$$\hat{U}\varphi(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}) \quad \forall \varphi \in C^{1,\alpha}(S),$$

причем

$$\forall \varphi \in C^{1,\alpha}(S) \quad \|\hat{U}\varphi, Q\|^{(2,\alpha)} \leq C \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}.$$

**Доказательство.** Случай внешней и внутренней области рассматривается одинаково. Пусть для определенности область  $Q$  ограничена, и мы хотим установить существование функции  $\psi$ , указанной в теореме, для внешней области  $Q^- = R^n \setminus \bar{Q}$ .

В области  $Q$  рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} Lu = -1 \text{ в } Q, \\ u|_S = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Ее решение  $u$  существует и  $u \in C^{1,\alpha}(\bar{Q})$ , см. [2]. В случае внешней области надо добавить условие на бесконечности  $u(\infty) = 0$  и заменить уравнение из (7) на  $Lu = h$ , где неотрицательная финитная функция  $h \in C_0^\infty(R^n)$  равна единице при  $|x| \leq R$ , а число  $R$  таково, что  $\bar{Q}$  содержится в открытом шаре радиуса  $R$  с центром в нуле.

На поверхности  $S$  рассмотрим функцию

$$\psi = u_\eta|_S \in C^{0,\alpha}(S), \quad (8)$$

где  $u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$  – производная по конормали  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $\eta_i = a_{ij}v_j$ . В силу принципа максимума  $u > 0$  в  $Q$ . Поскольку  $u|_S = 0$ , то в любой точке поверхности  $S$  выполнены условия теоремы Жиро о знаке косой производной [5]. Поэтому  $\psi(x) = u_\eta(x) > 0 \forall x \in S$ . В силу компактности  $S$  существует  $\delta > 0 : \psi(x) \geq \delta > 0 \forall x \in S$ . Так как  $\psi$  отделена от 0 и  $\psi \in C^{0,\alpha}(S)$ , то  $1/\psi \in C^{0,\alpha}(S)$ .

В области  $Q$  для произвольной функции  $\varphi \in C^{1,\alpha}(S)$  рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } Q, \\ v|_S = \varphi \in C^{1,\alpha}(S). \end{cases} \quad (9)$$

Существует единственное решение  $u \in C^{1,\alpha}(\bar{Q})$  [2] этой задачи и

$$\|v, Q\|^{(1,\alpha)} \leq C \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}.$$

Рассмотрим функцию  $w = uv$  и обозначим  $f = Lw$ . Имеем:

$$\begin{aligned} f &= L(uv) = uLv + vL'u - 2a_{ij}u_i v_j = \\ &= v - 2a_{ij}u_i v_j \in C^{0,\alpha}(\bar{Q}), \end{aligned}$$

$$\|f, Q\|^{(0,\alpha)} \leq C_1 \|u, Q\|^{(1,\alpha)} \leq C_2 \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}.$$

Обозначим

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{Q}, \\ 0, & x \in R^n \setminus \bar{Q}. \end{cases}$$

Для функции  $w$  справедлива формула Грина

$$\theta(x)w(x) = \int_Q H(x, y)Lw(y)dy + \int_S H(x, y)w_\eta(y)dy,$$

$x \in R^n$ , при условиях теоремы 1 установленная в [6]. Учитывая, что

$$w_\eta|_S = u_\eta v|_S + v u_\eta|_S = u_\eta v|_S = \psi \varphi,$$

для области  $Q^-$  получаем

$$\hat{U}\varphi(x) = Vf(x), \quad x \in \bar{Q}^-.$$

Из оценок для объемного потенциала [6] теперь вытекает, что  $\hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}^-)$ , причем

$$\begin{aligned} \|\hat{U}\varphi, Q^-\|^{(2,\alpha)} &= \|Vf, Q^-\|^{(2,\alpha)} \leq \\ &\leq C_1 \|f, Q\|^{(0,\alpha)} \leq C_2 \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $S \in C^{2,\alpha}$  – компактна, а для коэффициентов оператора  $L$  выполнены условия (2), (3). Пусть для оператора  $L$  существует главное фундаментальное решение. Тогда для функции  $\psi = a[v] = a_{ij}v_i v_j$

$$\begin{aligned} \hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}) &\Leftrightarrow \varphi \in C^{1,\alpha}(S), \\ (\exists C > 0) \forall \varphi \in C^{1,\alpha}(S) & \\ \|\hat{U}\varphi, Q\|^{(2,\alpha)} &\leq C \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Запишем представление

$$\begin{aligned} t^2 H(x, \xi) &= -\int_0^t \Gamma(x, \xi, t-\tau) \tau^2 d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t \int_{R^n} \Gamma(x, y, t-\tau) \tau H(y, \xi) dy d\tau, \end{aligned}$$

которое является частным случаем формулы [4], связывающей фундаментальные решения для эллиптического и соответствующего ему параболического уравнения. Умножив это равенство на  $a[v](\xi)\varphi(\xi)$ ,  $\xi \in S$  с непрерывной плотностью  $\varphi$  и проинтегрировав по  $S$ , получаем:

$$\begin{aligned} t^2 \hat{U}\varphi(x) &= -\int_0^t \int_S \Gamma(x, \xi, t-\tau) \tau^2 a[v](\xi)\varphi(\xi) ds d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t \int_{R^n} \Gamma(x, y, t-\tau) \tau \hat{U}\varphi(y) dy d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Если  $\varphi \in C^{1,\alpha}(S)$ , то  $t^2 \varphi \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$

и  $\|t^2 \varphi, \Sigma\|^{(1,\alpha)} \leq C \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}$ . Так как  $\hat{U}\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{R}^n)$ , то объемный потенциал в правой части принадлежит  $C^{2,\alpha}(\bar{R}^n)$ . Первый же интеграл является модифицированным потенциалом простого слоя для параболического уравнения. Его гладкость была исследована в [7]. В частности, он принадлежит  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Отсюда заключаем, что  $t^2 \hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,

$$\begin{aligned} \|t^2 \hat{U}\varphi; \Omega\|^{(2,\alpha)} &\leq C [\|t^2 \varphi, \Sigma\|^{(1,\alpha)} + \\ &+ \|\hat{U}\varphi, \Omega\|^{(0,\alpha)}] \leq C_1 \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}. \end{aligned}$$

Зафиксировав  $t = 1$ , имеем:  $\hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ ,

$$\|\hat{U}\varphi; Q\|^{(2,\alpha)} \leq \|t^2 \hat{U}\varphi; \Omega\|^{(2,\alpha)} \leq C \|\varphi; S\|^{(1,\alpha)}.$$

Пусть теперь  $\hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ . Так как  $\varphi$  непрерывна, то  $t\hat{U}\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{D})$ . Параболический объемный потенциал в правой части (10) принадлежит  $C^{2,\alpha}(\bar{D})$ . Учитывая, что  $t^2 \hat{U}\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ , делаем вывод, что первый интеграл в (10), являющийся модифицированным параболическим потенциалом простого слоя,

принадлежит  $C^{2,\alpha}(\bar{Q})$ . Отсюда следует [7],

что  $t^2 \varphi \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ . Зафиксировав  $t = 1$ , получаем,

что  $\varphi \in C^{1,\alpha}(S)$ .

Теорема доказана.

**Следствие 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и  $a_{ij}|_S \in C^{1,\alpha}(S)$ . Тогда

$$U\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}) \Leftrightarrow \varphi \in C^{1,\alpha}(S),$$

$$(\exists C > 0) \forall \varphi \in C^{1,\alpha}(S)$$

$$\|U\varphi, Q\|^{(2,\alpha)} \leq C \|\varphi, S\|^{(1,\alpha)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гюнтер Н.М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953.
2. **Бадерко Е.А.** Потенциал простого слоя и задача Дирихле // Докл. РАН. – 1994. – Т. 318, № 5. – С. 581–581.
3. **Миранда К.** Уравнения эллиптического типа. – М. : ИЛ, 1957.
4. **Конёнков А.Н.** О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 247–256.
5. **Камынин Л.И., Химченко Б.Н.** О принципе максимума для эллипτικο-параболического уравнения второго порядка // Сибирский мат. журн. – 1972. – Т. 13, № 4. – С. 773–779.
6. **Конёнков А.Н.** Некоторые свойства параболических и эллиптических потенциалов и их приложения : дис. ... канд. физ.-мат. наук. – МГУ, 1999.
7. **Конёнков А.Н.** Гладкость старших производных потенциала простого слоя для параболических уравнений с переменными коэффициентами в областях с негладкой боковой границей // Вестник РАЕН. – 2013. – № 4. – С. 17–22.

Конёнков Андрей Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 97-15-25; e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

# МЕТОД ПРЕОБРАЗУЮЩЕЙ МАТРИЦЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**М.И. Купцов**

*Академия ФСИИ России*

**С.Л. Яблочников**

*Московский технический университет связи и информатики*

**И.М. Купцов**

*Московский физико-технический институт (государственный университет)*

## THE METHOD OF TRANSFORMING MATRIX FOR THE EVIDENCE OF INTEGRAL MANIFOLDS' EXISTENCE

**M.I. Kuptsov, S.L. Yablochnikov, I.M. Kuptsov**

Рассматривается задача нахождения локального ненулевого интегрального многообразия нелинейной  $(n+m)$ -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой является периодической вектор-функцией по независимой переменной и содержит параметр. Предполагается, что у изучаемой системы имеется  $n$ -мерное тривиальное интегральное многообразие при всех значениях параметра, а соответствующая линейная подсистема имеет  $m$ -параметрическое семейство периодических решений. Это означает, в частности, что линейная система не обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Допускается, что матрица линейного приближения системы при нулевом значении параметра является функцией от независимой переменной. Проблема существования интегрального многообразия сводится к проблеме разрешимости операторных уравнений в пространстве ограниченных Липшиц-непрерывных периодических вектор-функций. Для доказательства наличия интегрального многообразия исходная система подвергается линеаризации, к которой применяется метод преобразующей матрицы. Метод преобразующей матрицы удается распространить в том числе и на случай отсутствия линейных по параметру членов операторных уравнений. Получены достаточные условия существования в окрестности состояния равновесия системы  $n$ -мерного ненулевого периодического интегрального многообразия.

*Ключевые слова:* метод преобразующей матрицы, интегральное многообразие, система обыкновенных дифференциальных уравнений, операторное уравнение, уменьшение размерности фазового пространства.

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(v, y, t) \quad (1)$$

для любых  $v, t$  имеет состояние равновесия  $y = 0$  и в области  $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$  ее решения существуют и единственны. Здесь и далее  $f, y, v$  –

$(n+m)$ -векторы,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $f(v, y, t+T) \equiv f(v, y, t)$ ,

$$\Lambda_1 = \{y: \|y\| \leq \Delta_1\} \subset R^{n+m}, \quad \Lambda_2 = \{v: \|v\| \leq \Delta_2\} \subset$$

The considered issue is to find a nonzero local integral manifold of a nonlinear  $(n+m)$ -dimensional system of ordinary differential equations, where the right part is a periodic vector-function of independent variable and consists of parameter. It is assumed that the researching system has  $n$ -dimensional trivial integral manifold with all parameter points and corresponding linear subsystem has the  $m$ -parametric family of periodic solutions. In particular it means that the linear system does not have the property of exponential dichotomy. It is assumed that the matrix of linear approximation of the system with zero parameter points is a function of the independent variable. The problem of existence of integral manifolds is reduced to the issue of operator equations solution in the space of bounded Lipschitz-continuous periodic vector functions. Linearization is used to prove the existence of integral manifolds of the original system, where the method converts the matrix. The method of transforming the matrix has been used including the case of absence of a linear in the parameter of the operator equations members. The sufficient conditions of existence in the neighborhood of the equilibrium state of the system  $n$ -dimensional nonzero periodic integral manifolds were received.

*Keywords:* the method of transforming matrix, integral manifold, ordinary differential equations system, operator equation, dimensional reduction of phase space.

$\subset R^{n+m}$ ,  $\Delta_1, \Delta_2$  – константы,  $R^p$  – стандартное евклидово пространство размерности  $p$  и  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в  $R^p$ .

Предположим, что замена переменных

$$y = \Gamma(\varepsilon, x, \varphi, t), \quad v = \xi(\varepsilon) \quad (2)$$

систему (1) приводит к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = X(\varepsilon, x, \varphi, t) \cdot x, \\ \dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon, x, \varphi, t), \end{cases} \quad (3)$$



где  $\Gamma, \xi, \varepsilon$  –  $(n+m)$ -векторы,  $X$  –  $(n \times n)$ -матрица,  $x$  –  $n$ -вектор,  $\varphi, \Phi$  –  $m$ -векторы,  $\Gamma(\varepsilon, x, \varphi, t) \neq 0$  при  $x \neq 0$ ,  $\Gamma(\varepsilon, 0, \varphi, t) \equiv 0$ . Кроме того, будем полагать, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = X(0, 0, \varphi, t) \cdot x, \\ \dot{\varphi} = \Phi(0, 0, \varphi, t), \end{cases} \quad (4)$$

имеет  $m$ -параметрическое семейство

$$x = x(\varphi_0, t), \quad \varphi = \varphi(\varphi_0, t)$$

ненулевых  $kT$ -периодических решений.

Будем говорить, что у системы (1) существует  $n$ -мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие  $\chi(\varphi_0, t)$ , если для всех  $\varphi_0$  найдется такое значение  $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$  параметра  $\nu$ , при котором

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(\varepsilon_0, \chi(\varphi_0, t), \varphi^\chi(\varphi_0, t), t) &\equiv \\ &\equiv f(\xi(\varepsilon_0), \Gamma(\varepsilon_0, \chi(\varphi_0, t), \varphi^\chi(\varphi_0, t), t)), \end{aligned}$$

причем  $\chi(\varphi_0, t)$  не обращается в ноль ни при каких значениях  $\varphi_0$  и  $t$ , является  $\omega$ -периодическим по компонентам  $m$ -вектора  $\varphi_0$ ,  $kT$ -периодическим по  $t$ , где  $k$  – натуральное число,  $\varphi = \varphi^\chi(\varphi_0, t)$  определяет интегральную кривую на многообразии. Задача существования нетривиального периодического интегрального многообразия системы (1) вблизи ее состояния равновесия и решается в данной работе.

Общий подход к решению поставленной задачи, разработанный Н.Н. Боголюбовым, Ю.А. Митропольским и А.М. Самойленко [1–4], состоит в построении функции Грина и успешно применяется для многих систем вида (3) (см., например, [5, 6]). Однако в данном случае этот подход реализовать не удастся, поскольку система (3) при всех значениях параметра  $\varepsilon$  имеет нулевое интегральное многообразие  $x = 0$ , а система (4) –  $m$ -параметрическое семейство периодических решений. Указанные условия удается обойти лишь с помощью нахождения решения вспомогательного векторного (бифуркационного) уравнения и перехода в его окрестность [7, 8].

Изложенные в данной работе результаты получены на основе модификации предложенного в [9] метода преобразующей матрицы, применение которого позволили получить новые достаточные условия существования локального интегрального многообразия для систем более общего вида, чем рассматриваемые в работах [10–15].

Пусть  $F(\varphi, t) \in \Omega_1, \varepsilon(\varphi) \in \Omega_2$  –  $\omega$ -периодические по компонентам вектора  $\varphi$  ограниченные соответственно числами  $\delta_{10}$  и  $\delta_{20}$  вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$\|F(\varphi_1, t_1) - F(\varphi_2, t_2)\| \leq \delta_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \delta_{12} |t_1 - t_2|, \quad (5)$$

$$\|\varepsilon(\varphi_1) - \varepsilon(\varphi_2)\| \leq \delta_{21} \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad (6)$$

имеющие соответственно размерность  $n$  и  $l$ ,  $0 < l \leq n + m$ ,  $F(\varphi, t)$  –  $kT$ -периодическая по  $t$ ,

$$\|F(\varphi, t)\| = \left[ \sum_{i=1}^n \sup_{\substack{\varphi_i \in [0, \omega] \\ t \in [0, kT]}} |F_i(\varphi, t)| \right]^{1/2},$$

$$\|\varepsilon(\varphi)\| = \left[ \sum_{i=1}^l \sup_{\varphi_i \in [0, \omega]} |\varepsilon_i(\varphi)| \right]^{1/2}.$$

Отметим, что если для множеств  $\Omega_i$  ввести указанную норму, то они становятся выпуклыми компактами [9, С. 15].

Для решения дифференциального уравнения  $\dot{\varphi} = \Phi(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi, t)$ , (7)

удовлетворяющего начальным данным  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,

примем обозначение  $\varphi_t^F$ . Пусть, кроме того,

$Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t)$  – матрицант уравнения

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi_t^F, t) \cdot x. \quad (8)$$

Здесь и далее  $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ ,  $n + m - l$  значений компонент вектора  $\varepsilon$  приняты равными 0, а вместо оставшихся  $l$  значений в уравнения системы (3) подставлены элементы функции  $\varepsilon(\varphi_0) \in \Omega_2$ .

**Определение.** Неособенную функциональную  $n \times n$ -матрицу  $Q_\varepsilon^F(\varphi_0)$  с постоянным определителем, непрерывную по всем своим переменным и  $\omega$ -периодическую по компонентам вектора  $\varphi_0$ , будем называть преобразующей матрицей системы (3), если у матрицы

$$\left( Y_\varepsilon^F(\varphi_0, kT) - I_n \right) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \quad (9)$$

существует, по крайней мере, один ненулевой столбец  $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ . Здесь  $I_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица.

Обозначим

$$X = \{x : \|x\| \leq \delta_1\} \subset R^n, \quad E = \{\varepsilon : \|\varepsilon\| \leq \delta_2\} \subset R^{n+m}.$$

Здесь и далее мы предполагаем, что правые части системы (3) являются  $\omega$ -периодическими по компонентам вектора  $\varphi$  и  $T$ -периодическими по независимой переменной  $t \in R$ , непрерывны и обеспечивают существование и единственность решений системы (3) в области  $R^{m+1} \times X \times E$  при достаточно малых  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Иначе говоря, мы полагаем, что замена переменных (2) сохраняет свойства существования и единственности решений системы (1).

Введем в рассмотрение систему уравнений

$$\begin{cases} q_\varepsilon^F(\varphi_0) = 0, \\ \int_0^{kT} \Phi(\varepsilon(\varphi_0), F(\varphi_0, t), \varphi_t^F, t) dt = 0. \end{cases} \quad (10)$$

**Теорема.** Пусть преобразующую матрицу системы (3) удастся построить так, что существуют такое число  $l$  ( $0 < l \leq n + m$ ) и такой ненулевой столбец  $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ , при которых для нахождения решения системы (10) достаточно найти решение некоторой, вообще говоря, отличной от (10) системы  $l$  уравнений

$$S_\varepsilon^F(\varphi_0) = 0, \quad (11)$$

имеющей для каждой функции  $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$  единственное решение  $\varepsilon^F(\varphi_0)$  из множества  $\Omega_2$ . Кроме того, пусть при  $t \in [0; kT]$  выполнено:

$$\|Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0)\| \leq r_0, \quad (12)$$

$$\|Y_\varepsilon^F(\varphi_0^*, t^*) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0)\| \leq r_1 \|\varphi_0^* - \varphi_0\| + r_2 |t^* - t|. \quad (13)$$

Тогда для любого вектора  $\varphi_0 \in R^m$  можно указать такое значение параметра  $\nu$ , что система (1) будет иметь ненулевое интегральное многообразие в окрестности состояния равновесия  $y = 0$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\varepsilon = \varepsilon^F(\varphi_0)$  является решением системы (11), то, значит, при  $\varepsilon = \varepsilon^F(\varphi_0)$  в тождество обращается и выражение (10). Следовательно, дифференциальное уравнение (8) для каждой функции  $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$  имеет  $kT$ -периодическое решение

$$x^F(\varphi_0, t) = Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \cdot C, \quad (14)$$

где все элементы постоянного  $n$ -вектора  $C$  равны нулю, кроме элемента, соответствующего номеру столбца  $q_\varepsilon^F(\varphi_0)$ , который равен  $c$  – произвольной константе. Неособенность преобразующей матрицы обеспечивает нетривиальность  $x^F(\varphi_0, t)$ .

Согласно условиям (12) и (13),  $x^F(\varphi_0, t)$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $r_1 \cdot c$  по переменной  $\varphi_0$  и  $r_2 \cdot c$  по  $t$ , ограничено числом  $r_0 \cdot c$ . Значит, за счет уменьшения  $c$  всегда можно добиться выполнения  $x^F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ .

Таким образом, мы построили оператор, определяемый равенствами (11) и (14), к которому, в силу единственности значения  $\varepsilon^F(\varphi_0)$  для каждой функции  $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$ , можно применить теорему [16, С. 26] (или теорему I.1.3 [9, С. 20]). Следовательно, у этого оператора существует неподвижная точка  $\Psi(\varphi_0, t) = Y_\varepsilon^\Psi(\varphi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\varphi_0) \cdot C$ .

Ясно, что при  $\varepsilon = \varepsilon^\Psi(\varphi_0)$  функции  $\Psi(\varphi_0, t)$ ,  $\varphi_i^\Psi$  определяют семейство ненулевых  $kT$ -периодических решений системы (3). Действительно, для того, чтобы убедиться в этом, достаточно принять во внимание обращение в тождество

уравнения (10) и продифференцировать  $\Psi(\varphi_0, t)$ , учитывая, что функция  $\varphi_i^\Psi$  удовлетворяет уравнению (7).

Для завершения доказательства теоремы остается вернуться к системе (1) с помощью замены (2). Итак,  $\Psi(\varphi_0, t)$  – искомое  $n$ -мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие системы (1).

Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 1 в целом повторяет доказательство теоремы о существовании интегрального многообразия из [17, с. 79] для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.

В качестве иллюстрации данной теоремы рассмотрим систему специального вида, к которой не может быть применен ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий из работ [1–15].

**Пример.** Пусть в систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = [\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - \\ - y_2^2 \cdot y_3^2] \cdot y_1 - [\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2] \cdot y_3, \\ \dot{y}_2 = [\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + 2y_1 y_3] \cdot y_2, \\ \dot{y}_3 = [\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2] \cdot y_1 + [\cos t + \varepsilon_1^2 - \\ - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - y_2^2 \cdot y_3^2] \cdot y_3 \end{cases} \quad (15)$$

входит только одна векторная величина  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ ,  $\alpha_i(\varepsilon) = a_{i1} \cdot \varepsilon_1 + a_{i2} \cdot \varepsilon_2 + a_{i3} \cdot \varepsilon_3 + \bar{\alpha}_i(\varepsilon)$ ,  $\bar{\alpha}_i(\varepsilon) = o(\|\varepsilon\|)$ ,  $a_{12} \cdot a_{23} \neq a_{13} \cdot a_{22}$ . Будем также полагать, что для выражений  $\bar{\alpha}_i(\varepsilon)$  выполнены условия Липшица с такими постоянными  $\gamma_i$ , для которых  $\gamma_i \rightarrow 0$  при  $\delta_{20} \rightarrow 0$ .

После замены переменных  $y_1 = x_1 \cdot \cos \varphi$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_1 \cdot \sin \varphi$  уравнения (15) преобразуются к виду (3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - \\ - x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \sin^2 \varphi] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + x_1^2 \cdot \sin 2\varphi] \cdot x_2, \\ \dot{\varphi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + x_2. \end{cases}$$

Тогда система (4) здесь состоит из трех уравнений:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos t \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \sin t \cdot x_2, \\ \dot{\varphi} = \cos 2t \end{cases}$  и имеет однопараметрическое ( $m = 1$ ) семейство  $2\pi$ -периодических решений  $x_1 = e^{\sin t}$ ,  $x_2 = e^{1 - \cos t}$ ,  $\varphi = \varphi_0 + 0,5 \cdot \sin 2t$ .

Вместо уравнений (7) и (8) будут соответственно рассматриваться

$$\dot{\varphi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) + F_2(\varphi_0, t), \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + X_1(\varphi_0, t)] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + X_2(\varphi_0, t)] \cdot x_2, \end{cases} \quad (17)$$

где  $X_1(\varphi_0, t) = \varepsilon_1^2(\varphi_0) - \varepsilon_2^4(\varphi_0) \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4(\varphi_0) - F_1^2(\varphi_0, t) \cdot F_2^2(\varphi_0, t) \cdot \sin^2(\varphi_t^F)$ ,  $X_2(\varphi_0, t) = \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) + F_1^2(\varphi_0, t) \cdot \sin(2\varphi_t^F)$ , причем  $F(\varphi_0, t) = (F_1(\varphi_0, t), F_2(\varphi_0, t))^T$ ,  $\varepsilon(\varphi_0) = (\varepsilon_1(\varphi_0), \varepsilon_2(\varphi_0), \varepsilon_3(\varphi_0))^T$  –  $2\pi$ -периодические по  $\varphi_0$ , а  $F(\varphi_0, t)$  и по  $t$ .

Кроме того, в силу свойств правых частей системы (15), решение  $\varphi_t^F$  уравнения (16) ограничено, удовлетворяет условию Липшица по всем своим переменным при  $t \in [0, 2\pi]$  и  $2\pi$ -периодическое по начальным данным  $\varphi_0$ . А тогда матрицант уравнения (17) представляет собой диагональную матрицу  $Y_\varepsilon^F(\varphi_0, t) = \text{diag} \left( \exp \left[ \sin t + \int_0^t X_1(\varphi_0, \tau) d\tau \right], \exp \left[ 1 - \cos t + \int_0^t X_2(\varphi_0, \tau) d\tau \right] \right)$  и обладает точно такими же свойствами (см., например, [9, С. 29]).

Выбирая теперь преобразующую матрицу

$$Q_\varepsilon^F(\varphi_0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ для выражения (9) получаем}$$

$$\begin{aligned} & (Y_\varepsilon^F(\varphi_0, 2\pi) - I_2) \cdot Q_\varepsilon^F(\varphi_0) = \\ & = \begin{pmatrix} \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0, \tau) d\tau \right] - 1 & 0 \\ \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0, \tau) d\tau \right] - 1 & \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0, \tau) d\tau \right] - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Положив тогда в условиях теоремы о существовании интегрального многообразия  $l = 3$ ,

$$q_\varepsilon^F(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0, \tau) d\tau \right] - 1, \\ \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0, \tau) d\tau \right] - 1 \end{pmatrix},$$

для системы (10) получим представление

$$\begin{cases} \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_1(\varphi_0, \tau) d\tau \right] = 1, \\ \exp \left[ \int_0^{2\pi} X_2(\varphi_0, \tau) d\tau \right] = 1, \\ \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0, \tau) d\tau = 0. \end{cases}$$

Значит, в качестве системы (11) достаточно рассмотреть систему трех уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\varphi_0) \cdot \sqrt{2\pi} = \left[ \varepsilon_2^4(\varphi_0) \cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\varphi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0, \tau) \cdot F_2^2(\varphi_0, \tau) \cdot \sin^2(\varphi_\tau^F) d\tau \right]^{0,5}, \\ \alpha_1(\varepsilon(\varphi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0, \tau) \cdot \sin(2\varphi_\tau^F) d\tau = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon(\varphi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0, \tau) d\tau = 0. \end{cases} \quad (18)$$

В силу условия  $a_{12} \cdot a_{23} \neq a_{13} \cdot a_{22}$  матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ будет неособенной и систему}$$

(18) можно записать в виде

$$\varepsilon(\varphi_0) = A^{-1} \cdot y^{F, \varepsilon}(\varphi_0), \quad (19)$$

где  $y^{F, \varepsilon}(\varphi_0) = (y_1^{F, \varepsilon}(\varphi_0), y_2^{F, \varepsilon}(\varphi_0), y_3^{F, \varepsilon}(\varphi_0))$ ,

$$\begin{aligned} y_1^{F, \varepsilon}(\varphi_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \varepsilon_2^4(\varphi_0) \cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\varphi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0, \tau) \cdot F_2^2(\varphi_0, \tau) \cdot \sin^2(\varphi_\tau^F) d\tau \right]^{0,5}, \\ y_2^{F, \varepsilon}(\varphi_0) &= -\bar{\alpha}_1(\varepsilon(\varphi_0)) - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_1^2(\varphi_0, \tau) \cdot \sin(2\varphi_\tau^F) d\tau, \\ y_3^{F, \varepsilon}(\varphi_0) &= -\bar{\alpha}_2(\varepsilon(\varphi_0)) - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_2(\varphi_0, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Путем уменьшения чисел  $\delta_{ij}$  легко убедиться, что оператор, задающий уравнение (19), является сжимающим и для каждой функции  $F(\varphi_0, t) \in \Omega_1$  переводит пространство  $\Omega_2$  в  $\Omega_2$ . Этим фактом окончательно устанавливается выполнение всех условий теоремы и, значит, существование локального ненулевого интегрального многообразия системы (15).

В заключение отметим, что  $\alpha_i(\varepsilon)$  можно выбрать таким образом, чтобы система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1^2 - 1,5 \cdot \varepsilon_2^4 - \varepsilon_3^4 = 0, \\ \alpha_1(\varepsilon) = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon) = 0 \end{cases} \text{ не имела}$$

нетривиальных решений, а матрица  $A$  оставалась неособенной. Действительно, это выполняется, например, при  $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ ,  $\alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  и, следовательно, ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий не только из работ [1–8], но и из [9–15] не может быть приложен к системе (15).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Боголюбов Н.Н.** О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов : Изд-во АН УССР, 1945. – 139 с.
2. **Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.** Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М. : Наука, 1973. – 512 с.
3. **Самойленко А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариант-ные торы. – М. : Наука, 1987. – 301 с.
4. **Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В.** Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних злічених систем диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, N 2. – С. 253–271.
5. **Курбаншоев С.З., Нусайриев М.А.** Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2014. – Т. 57, № 11–12. – С. 807–812.
6. **Щетинина Е.В.** Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости // Вестник Самарского государственного университета. – 2010. – № 6 (80). – С. 93–105.
7. **Бибиков Ю.Н.** Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1991. – 142 с.
8. **Волков Д.Ю.** Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел // Вестник Ленинградского университета. – 1988. – Серия 1, № 2. – С. 102–103.
9. **Купцов М.И.** Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук / УдГУ. – Ижевск, 1997. – 133 с.
10. **Купцов М.И.** Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1579–1580.
11. **Купцов М.И.** Об условиях существования интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Труды Средневолжского математического общества. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 95–96.
12. **Купцов М.И.** Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 855.
13. **Купцов М.И., Теняев В.В., Купцов И.М.** Об одной модификации метода интегральных многообразий в системах управления // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2016. – № 55. – С. 146–152.
14. **Kuptsov M.I.** Local integral manifold of a system of differential equations // Differential equations. – 1998. – Vol. 34, N 7. – P. 1005–1007.
15. **Купцов М.И., Яблочников С.Л.** Аспекти застосування методу перетворюючої матриці // Фізико-математична освіта : наук. журн. – 2016. – Вип. 1 (7). – С. 87–95.
16. **Терёхин М.Т.** Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие к спецкурсу. – Рязань : РГПИ, 1992. – 88 с.
17. **Купцов М.И., Терёхин М.Т., Теняев В.В.** К проблеме существования интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 76–84.

Купцов Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, начальник кафедры математики и информационных технологий управления Академии ФСИН России. 390000, г. Рязань, ул. Сенная, 1.  
Тел.: +7 (910) 902-43-98; e-mail: kuptsov\_michail@mail.ru

УДК 517.977.58, 004.942

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИКИ СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

**А.В. Лебедев***Тверской филиал РАНХиГС***С.В. Видов, М.С. Маскина***Академия ФСИИ России*

## MATHEMATICAL MODELLING OF LOGISTICS OF SOCIAL SYSTEM

**A.V. Lebedev, S.V. Vidov, M.S. Maskina**

Рассматривается задача динамики транспортных человеческих потоков в социальной системе с учетом особенностей организации данной системы. Предложен математический метод, позволяющий описать подобную задачу и найти ее решение.

*Ключевые слова:* динамика человеческих потоков, логистика, дифференциальные уравнения, социальная система.

Уголовное наказание исполняется в различных видах исправительных учреждений, предусматривающих различные условия содержания. Нахождение осужденного в том или ином виде исправительного учреждения может быть описано различными моделями [1–4], базирующимися на математическом аппарате систем дифференциальных уравнений. Все перемещения осужденных протекают контролируемым (управляемым) образом. Количество перемещаемых осужденных определяется различными факторами (степенью исправления осужденного, правом на условно-досрочное освобождение, переполненностью учреждения, близостью его нахождения к месту предыдущего проживания и т.д.). Знание и понимание динамики движения осужденных является чрезвычайно важной задачей для уголовно-исполнительной системы России.

Важную роль в описании динамики осужденных играет и теоретическая часть – развитие методов анализа и формализации математического описания различных процессов, которое рассматривалось в целом ряде работ [1–4]. Преобразование исходных данных, анализ возможных механизмов движения осужденных – довольно сложный процесс, требующий времени и специальных знаний. Однако практическим работникам процесс математического преобразования дифференциальных уравнений не представляет интереса, им предпочтительно иметь готовую формулу или достаточно простой алгоритм, позволяющий определять интересующие их величины. Несмотря на разнообразие видов исправительных учреждений и условий отбывания наказания, существует множество однотипных уравнений, описывающих эти процессы. Нами будет показано, что возможно

The problem of dynamics of transport human streams in social system taking into account the features of the organization of this system is considered. The mathematical method allowing to describe a similar task and to find its solution is offered.

*Keywords:* dynamics of transport human streams, logistics, differential equations, social system.

получение формул, которые применимы уже в готовом виде.

Для большинства социальных систем существует ситуация неопределенности имеющихся данных, которая характеризуется тем, что рассчитать вероятности осуществления каждой из альтернатив на основе имеющихся не полных и не точных данных в принципе невозможно. Во многом это вызвано самой природой сведений, циркулирующих в экономических и социальных системах, к которым следует отнести и уголовно-исполнительную систему. Если экономическим данным свойственна предельная точность и структурированность данных (в прочем не вполне достаточная для полного избегания рисков), то для данных социальных систем вопрос об их точности, как правило, даже не рассматривается. Они заведомо несут в себе определенную ошибку, связанную с недостоверностью представления сведений, и сложностью их проверки. В связи с этим проведение расчетов на периодически поступающих данных не вполне надежно, и, по мнению авторов, построение математических моделей на небольшом количестве выверенных данных – это более корректный путь [5].

Применим идею метода к системам дифференциальных уравнений, приведенных к специальному виду. Пусть дана система второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= f(P_1(t), P_2(t)), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} g(P_1(t), P_2(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f(P_1(t), P_2(t))$  и  $g(P_1(t), P_2(t))$  – рациональные функции, а  $\varepsilon \ll 1$ . Рассмотрим область на фазовой

плоскости, в которой переменные величины  $x$  и  $y$  уменьшаются в пределах от 0 до 1. Пусть знаменатели  $f(P_1(t), P_2(t))$  и  $g(P_1(t), P_2(t))$  не стремятся к 0 и не обращаются в 0 во всей фазовой плоскости, тогда  $f(P_1(t), P_2(t)) \approx 1$  и  $g(P_1(t), P_2(t)) \approx 1$ .

Траектория динамики параметров социальной системы на фазовой плоскости определяется уравнением

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{g(P_1(t), P_2(t))}{f(P_1(t), P_2(t))}. \quad (2)$$

Всюду кроме близкой окрестности изоклины  $g(P_1(t), P_2(t)) = 0$  производная  $\frac{dP_2}{dP_1} \approx \frac{1}{\varepsilon}$ . Следова-

тельно, из любой точки области изображающая точка системы за время  $\approx \varepsilon$  либо достигнет изоклины, либо выйдет за пределы области [6]. Таким образом, если начальные значения находятся в области притяжения устойчивых стационарных решений уравнения  $\frac{dP_2(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} g(P_1(t), P_2(t))$ , то за время  $\approx \varepsilon$  изображающая точка оказывается в  $\varepsilon$ -окрестности изоклины, и дальнейшее движение изображающей точки описывается системой уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = f(P_1(t), P_2(t)), \quad (3)$$

$$0 = g(P_1(t), P_2(t)) \quad (4)$$

вплоть до момента потери устойчивости данного стационарного решения уравнения. Потеря устойчивости происходит в точках, где  $dg/dP_2 = 0$ ,  $d^2g/dP_2^2 \neq 0$ . При этом изображающая точка либо переходит на другую устойчивую ветвь, либо покидает область.

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, y), \quad i = 1, \dots, p, \quad (5)$$

$$\varepsilon \frac{dy_j}{dt} = g_j(x, y), \quad j = 1, \dots, q. \quad (6)$$

Уравнения типа (5) назовем системой медленных движений, а уравнения типа (6) – системой быстрых движений. Пусть  $y_j = \varphi_j(x)$  является решением системы  $g_j(x, y) = 0$ . Это решение является устойчивым в области  $D$  пространства  $(x)$ , если для каждой точки  $(x_{i0}, \dots, x_{p0})$  из  $D$  решение  $y_j = \varphi_j(x_0)$  является устойчивым положением равновесия системы.

Рассмотрим вышеизложенный метод в применении к следующей системе уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -k_1SE + k_{-1}U, \quad (7)$$

$$\frac{dU}{dt} = k_1SE - k_{-1}U - k_2U, \quad (8)$$

$$\frac{dE}{dt} = -k_1SE - k_{-1}U + k_2U, \quad (9)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_2U. \quad (10)$$

Отметим, что форма уравнений (7–10) очень близка к уравнениям, рассмотренным автором в работе [7].

Введем безразмерные величины  $\sigma = S/S_0$ ,  $e = U/E_0$ ,  $\tau = k_1S_0t$ , где  $S_0$  и  $E_0$  – начальные значения соответствующих величин. Исключив  $E$  и  $P$  с помощью выражений ( $S+U+P=S_0$  и  $E+U=E_0$ ), имеем

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma + \frac{K_S + \sigma S_0}{S_0} e, \quad (11)$$

$$\varepsilon \frac{de}{d\tau} = \sigma + \frac{K_m + \sigma S_0}{S_0} e, \quad (12)$$

где  $K_0 = k - 1/k_1$ ,  $K_m = (k - 1 + k_2)/k_1$ ,  $\varepsilon = E_0/S_0$ .

Рассмотрим возможные случаи:

1.  $K_m \leq S_0$ .

В этом случае система (11, 12) может быть приведена к виду (5, 6) и ее решение приближается к решению системы

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma + \frac{K_S + \sigma S_0}{S_0} e,$$

$$e = \frac{\sigma S_0}{K_m + \sigma S_0}.$$

2.  $K_S \approx S_0$ ,  $K_m/S_0 \approx 1/\varepsilon$ .

В этом случае система (11, 12) может быть приведена к виду

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma + \frac{K_S + \sigma S_0}{S_0} e,$$

$$\varepsilon^2 \frac{de}{d\tau} = \varepsilon\sigma - e + o(\varepsilon).$$

3.  $K_S/S_0 \approx K_m/S_0 \approx 1/\varepsilon$ .

После новой замены переменных  $\tau_1 = \tau/\varepsilon$  система (11, 12) может быть приведена к виду

$$\frac{d\sigma}{d\tau_1} = -\varepsilon\sigma + e + o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{de}{d\tau_1} = \varepsilon\sigma - e + o(\varepsilon).$$

Аналогичный предельный переход возможен и в других случаях. Перепишем систему (11, 12) в виде

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma + \sigma e + \frac{K_S}{S_0} e,$$

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{S_0}{E_0} \left( \sigma - \sigma e - \frac{K_m}{S_0} e \right).$$

4. Пусть  $S_0 \approx E_0$ ,  $K_S \approx S_0$ ,  $S_0/K_m = \varepsilon \ll 1$ .

Тогда система (11, 12) приводится к виду

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\sigma + \sigma e + e + o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{de}{d\tau} = \varepsilon(\sigma - \sigma e) - e + o(\varepsilon^2).$$

5. Пусть  $S_0 \approx E_0$ ,  $S_0 / K_s \approx S_0 / K_m = \varepsilon \ll 1$ .

Тогда система (11, 12) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} &= -\sigma + \sigma e + \frac{1}{\varepsilon} e + o(\varepsilon), \\ \frac{de}{d\tau} &= \sigma - \sigma e - \frac{1}{\varepsilon} e + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

6. Пусть  $S_0 \approx E_0$ ,  $S_0 / K_s \approx S_0 / K_m = \varepsilon \ll 1$ .

Введем новую переменную  $p = \sigma + e$ . Тогда система (11, 12) может быть приведена к виду

$$\frac{dp}{d\tau} = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \frac{de}{d\tau} = \varepsilon(p - e)(1 - e) - e + o(\varepsilon^2).$$

Таким образом, вышеуказанный метод можно применять для рассмотрения систем уравнений высокой степени при определенных ограничениях.

При рассмотрении последующих уравнений нами будет допущено, что с течением времени в системе достаточно быстро устанавливается квазистационарное состояние системы, то есть такое состояние, когда каждое промежуточное состояние (вид отбывания наказания) находится в равновесии с другими. Квазистационарное состояние означает, что только часть исследуемых переменных достигает стационарных значений, а другие продолжают меняться достаточно медленно. Такой метод позволит решать лишь системы уравнений, связывающих между собой квазистационарные величины, вместо решения систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что скорость изменения численности в каждом промежуточном состоянии зависит от численности лиц в других состояниях и может быть представлена системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= f_1(e_1, e_2, \dots, e_n), \\ \frac{de_2}{dt} &= f_2(e_1, e_2, \dots, e_n), \\ &\dots \\ \frac{de_n}{dt} &= f_n(e_1, e_2, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Если устанавливается стационарное состояние, то численность лиц, содержащихся в местах лишения свободы, практически не меняется с течением времени:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= 0, \\ \frac{de_2}{dt} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{de_n}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему уравнений, решение которой позволяет найти численность лиц, соответствующих стационарному состоянию:

$$\begin{aligned} f_1(e_1, e_2, \dots, e_n) &= 0, \\ f_2(e_1, e_2, \dots, e_n) &= 0, \\ &\dots \\ f_n(e_1, e_2, \dots, e_n) &= 0. \end{aligned}$$

Однако и в этом случае с увеличением числа уравнений в системе процесс нахождения решения системы становится очень трудоемким и может привести к ошибочным результатам.

Обозначим через  $k_{ij}$  – константу скорости для перехода в прямом направлении  $E_i \rightarrow E_j$ , а через  $k_{ji}$  – константу скорости для перехода в обратном направлении  $E_j \rightarrow E_i$ , скорость образования состояния  $E_i$  будет составлять  $\sum_{j=1}^n k_{ji} e_j$ . Скорость

исчезновения состояния будет равна  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} e_i$ .

Условие стационарности означает равенство нулю производных по времени от всех возможных состояний:

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{j=1}^n k_{ji} e_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} e_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Из  $n$  уравнений (13) независимыми являются только  $n-1$ , поэтому для нахождения всех  $n$  стационарных состояний необходимо добавить еще одно уравнение. Такое уравнение возникнет из условия сохранения общей численности ( $e_0$ ):

$$\sum_{i=1}^n e_i = e_0.$$

Точное равенство нулю производных от всех промежуточных состояний может не выполняться, поэтому будем говорить о квазистационарном приближении на некотором отрезке времени, пока можно пренебречь изменением численности в промежуточных состояниях по сравнению с изменением численности в начальном состоянии.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_{j1} e_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n k_{1j} e_1 &= 0, \\ &\dots \\ \sum_{j=1}^n k_{jn} e_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n k_{nj} e_n &= 0, \\ \sum_{i=1}^n e_i &= e_0. \end{aligned}$$

После того как система дифференциальных уравнений сведена к системе линейных уравнений, величину  $e_m$  можно найти, пользуясь правилом Крамера, согласно которому невырожденная система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными имеет единственное решение, которое может

быть найдено по формуле  $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где

$|A|$  – определитель системы;  $|A_j|$  – определитель, полученный из определителя  $|A|$  заменой  $j$ -го столбца столбцом из свободных членов системы.

Таким образом, авторами предложен математический метод, который позволяет производить описание динамики осужденных в учреждениях УИС с учетом функции восстановления преступности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Горошко И.В., Лебедев А.В., Петрова В.Ю.** Об одном из подходов к моделированию динамики преступности // Труды Академии управления МВД России. – 2011. – № 2 (18). – С. 54–58.
2. **Лебедев А.В.** Математическая модель преступности в условиях реального управления // Вестник Владимирского юридического института ФСИН России. – 2011. – № 4 (21). – С. 92–99.
3. **Лебедев А.В., Видов С.В.** Математическая модель подготовки сотрудников уголовно-исправительной системы // Успехи современной науки и образования. – 2017. – Т. 5, № 2. – С. 59–64.
4. **Лебедев А.В.** Математическая модель управляемого процесса создания требований к адаптивному состоянию социальной системы // Экономика и менеджмент систем управления. – 2017. – № 4.3 (26). – С. 372–379.
5. **Лебедев А.В.** Структурирование данных для управления рисками в социальных и экономических системах // Конкурентоспособность в глобальном мире: экономика, наука, технологии. – 2017. – № 11, ч. 4. – С. 475–477.
6. **Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратов Т.В.** Дифференциальные уравнения. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 348 с.
7. **Лебедев А.В.** О нахождении аналитического вида функции восстановления преступности // Человек: преступление и наказание. – Рязань. – 2013. – № 3 (82). – С. 108–112.

Лебедев Алексей Викторович, д-р техн. наук, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры естественно-научных и гуманитарных дисциплин Тверского филиала РАНХиГС. 170100, г. Тверь, ул. Вагжанова, д. 7. Тел.: +7 4822 41-50-28; e-mail: lebedevavic@rambler.ru



УДК 517.925

# ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ПОЛИТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Е.Ю. Лискина

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

## THE STUDY OF EQUILIBRIUM STATES OF DYNAMIC MODELS OF SOCIO-POLITICAL CONTROL IN SOME CRITICAL CASES

E.J. Liskina

Исследуется динамическая модель социально-политического управления, которая представляет собой автономную нелинейную систему дифференциальных уравнений второго порядка. Матрица линейного приближения системы зависит от параметра и при его нулевом значении имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений. Нелинейная часть является формой второго порядка относительно компонент фазового вектора. Рассмотрены два случая для коэффициентов нелинейной части. Получено условие бифуркации возникновения предельного цикла и возникновения центра в окрестности нулевого состояния равновесия. Построены фазовые портреты.

*Ключевые слова:* система нелинейных дифференциальных уравнений, критический случай, ненулевое периодическое решение, бифуркация рождения предельного цикла, фазовый портрет.

We investigate a dynamic model of socio-political control, which is an Autonomous nonlinear system of differential equations of the second order. The linear approximation matrix of the system depends on the parameter and has a pair of complex-conjugate eigenvalues at its zero value. The nonlinear part is a second order form of the phase vector components. We have considered two cases for the coefficients of the nonlinear part. We obtained the condition of bifurcation of the limit cycle and the center in the vicinity of the zero equilibrium state and constructed phase portraits.

*Keywords:* system of nonlinear differential equations, critical case, non-zero periodic solution, bifurcation of the birth of the limit cycle, phase portrait.

**Введение.** В работе В.И. Арнольда [1] было предложено использовать техническое понятие обратной связи при моделировании социально-политических структур системами дифференциальных уравнений. В работе [2] была предложена модель с двойной обратной связью вида

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1(x)x + \varepsilon_1 f_1(y) + F_1(t), \\ \dot{y} = k_2(y)y + \varepsilon_2 f_2(x) + F_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  – скорость производства некоторого продукта,  $y$  – интенсивность руководства социально-политической ситуацией в регионе (или производство продукта  $x$  управляется руководством  $y$ , принимающим решение о скорости производства). Слагаемые  $k_1(x)x$  и  $k_2(y)y$  ( $k_1(x) = a_1x + b_1$ ,  $k_2(y) = a_2y + b_2$ ) определяют процессы насыщения в рассматриваемой социальной структуре. Функции  $f_1(y) = y + c_1y^2$ ,  $f_2(x) = -x + c_2x^2$  осуществляют рефлексивную обратную связь согласно «мягкой» модели роста Мальтуса;  $f_1(y)$  показывает, что скорость роста продукции регулируется центральным руководством (линейные члены) и реагирует на изменения местной региональной

политики управления (квадратичные слагаемые);  $f_2(x)$  показывает, что стабильность производства позволяет уменьшить интенсивность центрального руководства (линейные члены), но при этом должно сохраниться региональное управление (квадратичные слагаемые). Слагаемые  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  отражают основные социально-психологические факторы, влияющие на скорость течения процессов в рассматриваемом регионе.

Также в [2] был рассмотрен частный случай модели (1), в котором  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ,  $F_1(t) = F_2(t) \equiv 0$ ,  $c_1 = c$ ,  $c_2 = d$ ,  $b_1 = b_2 = \mu$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = f$ . Предполагалось, что  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $f$  – постоянные коэффициенты,  $\mu$  – параметр, изменение которого влияет на развитие социальной структуры региона. С учетом сказанного система (1) приняла вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + ax^2 + cy^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y + dx^2 + fy^2. \end{cases} \quad (2)$$

Было выполнено исследование системы (2) в окрестности нулевого состояния равновесия при изменении параметра  $\mu$ , получены условия бифурка-

ции рождения предельного цикла. В статье [3] определены условия аналогичной бифуркации, но для ненулевого состояния равновесия, а в работе [4] – исследованы возможные бифуркации числа состояний равновесия системы (2). Существенным условием в этих исследованиях является выполнение неравенства  $ad - cf \neq 0$ .

В настоящей работе предлагается рассмотреть следующие случаи:

1) исследовать изменение поведения траекторий системы (2) в зависимости от изменения параметра  $\mu$  при условии  $ad - cf = 0$ , числа  $a, c, d, f$  – различны;

2) исследовать изменение поведения траекторий системы (2) в зависимости от изменения параметра  $\mu$  при условии  $a = d = c = f$ .

**1. Исследование состояний равновесия и поведения траекторий системы (2) при условии  $ad - cf = 0$ , числа  $a, c, d, f$  – различны.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2). Ее состояния равновесия определяются решениями системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y + x\mu + ax^2 + cy^2 = 0, \\ -x + y\mu + dx^2 + fy^2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Умножим первое уравнение системы (3) на  $d$ , а второе на  $(-a)$  и сложим почленно, тогда с учетом условия  $ad - cf = 0$  система (3) примет вид

$$\begin{cases} y + x\mu + ax^2 + cy^2 = 0, \\ (\mu d + a)x = (\mu a - d)y. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим  $\beta(\mu) = \frac{\mu d + a}{\mu a - d}$ . Непосредственными вычислениями получаем следующие случаи для множества решений системы (4):

1)  $\mu \neq \frac{d}{a}$ ,  $a + c(\beta(\mu))^2 \neq 0$ , тогда система (2) имеет два состояния равновесия:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \\ \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\mu + \beta(\mu)}{a + c(\beta(\mu))^2}, \\ y &= \beta(\mu)x. \end{aligned} \right.$$

Заметим, что  $a + c(\beta(\mu))^2 \neq 0$  при всех  $\mu \neq \frac{ad(a-c) \pm \sqrt{D}}{a^3 + cd^2}$ ,  $D = -ac(2a^2d + d^3 + a^4)$ ;

2) при  $\mu = \frac{d}{a}$  получаем следующие состояния равновесия системы (2):

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \\ \left\{ \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= -\frac{1}{c}; \end{aligned} \right.$$

3) при  $\mu \neq \frac{d}{a}$ ,  $a + c(\beta(\mu))^2 = 0$  система (2) имеет одно состояние равновесия  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Таким образом, при  $ad - cf = 0$  система (2) имеет два или одно состояние равновесия. Определим их тип и исследуем поведение траекторий системы (2) в их окрестности при  $a + c(\beta(\mu))^2 \neq 0$ .

Рассмотрим состояние равновесия  $O(0; 0)$ . Матрица системы линейного приближения имеет вид  $A(0; 0) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$ , ее собственные значения

$\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . При  $\mu \neq 0$  состояние равновесия является грубым фокусом, характер устойчивости которого определяется знаком  $\mu$ , поэтому значение параметра  $\mu = 0$  является бифуркационным. При  $\mu = 0$  перейдем в системе (2) к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  и, исключая переменную  $t$ , получим дифференциальное уравнение относительно переменных  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho \frac{\rho A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)}, \quad (5)$$

в котором  $A(\varphi) = a \cos^3 \varphi + c \sin^2 \varphi \cos \varphi + d \cos^2 \varphi \sin \varphi + f \sin^3 \varphi$ ,  $B(\varphi) = a \cos^2 \varphi \sin \varphi + c \sin^3 \varphi - f \cos \varphi \sin^2 \varphi - d \cos^3 \varphi$ .

Выберем число  $\delta > 0$  так, чтобы для любого  $\rho \in [0; \delta]$  и при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$  выполнялось неравенство  $|\rho B(\varphi)| < 1$ , в силу которого правая часть уравнения (5) на множестве  $[0; 2\pi] \times [0; \delta]$  может быть разложена в ряд

$$\frac{\rho^2 A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{n+2} A(\varphi) B^n(\varphi),$$

сходящийся равномерно на отрезке  $[0; \delta]$  при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . В соответствии со схемой, предложенной в [5, С. 71–74], построим функцию последования уравнения (5) на части положительной полуоси  $Ox$ , соответствующей значению  $\rho_0 \in [0; \delta_0]$ :

$$\rho(2\pi, \rho_0) = \rho_0 - \alpha_5 \rho_0^5 + o(\rho_0^5),$$

где  $\alpha_5 = \pi(d^2 - c^2) \frac{ad}{8} \gamma$ ,  $\gamma = \frac{43a}{12c} + \frac{37a^3d}{6c^2} - \frac{7d}{6} - \frac{11ad}{2c^2} - \frac{19a^2}{12c^2} - \frac{9a^2d}{2c^2} + \frac{5}{4} + \frac{5a^4d}{c^4} + \frac{13a^3}{4c^3}$ . Так как первые коэффициенты функции последования  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_5 \neq 0$  при  $d^2 - c^2 \neq 0$  и при  $\gamma \neq 0$ , то состояние равновесия  $O(0; 0)$  является сложным фокусом второго порядка [5, с. 176]. Поэтому при изменении параметра  $\mu$  в окрестности точки  $O(0; 0)$  может возникнуть не более двух предельных циклов.

Рассмотрим состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$ ,  $x_0 = -\frac{\mu + \beta(\mu)}{a + c\beta(\mu)}$ ,  $y_0 = \beta(\mu)x_0$ . При  $\mu \neq \frac{d}{a}$  и  $\mu \neq 0$  матрица системы линейного приближения в окрестности точки  $M$  имеет вид  $\begin{pmatrix} \mu + 2ax_0 & 1 + 2cy_0 \\ -1 + 2dx_0 & \mu + 2fy_0 \end{pmatrix}$ , ее собственные значения  $\lambda_{1,2}$  могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \mu + (a + f\beta(\mu))x_0 \pm \sqrt{D_1},$$

$$D_1 = (a + f\beta(\mu))^2 x_0^2 - 2(d - c\beta(\mu))x_0 - 1.$$

Так как значения  $\lambda_{1,2}$  зависят от значений параметра  $\mu$  и сочетания коэффициентов  $a, c, d, f$ , то тип состояния равновесия следует определять в каждом конкретном случае. При  $\mu = 0$  выражение  $\beta(0) = -\frac{a}{d}$ , а состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$

имеет координаты  $x_0 = \frac{d}{d^2 + ac}$ ,  $y_0 = -\frac{a}{d^2 + ac}$ . Не посредственными вычислениями получаем, что собственные значения матрицы системы линейного приближения в окрестности точки  $M$  равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(d+f)}{d^2+ac} \pm \sqrt{\left(\frac{a(d+f)}{d^2+ac}\right)^2 + 1},$$

откуда следует, что числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны, различны и имеют разные знаки. Таким образом, при  $\mu = 0$  состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$  является седлом.

При  $\mu = \frac{d}{a}$  состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$  имеет координаты  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -\frac{1}{c}$ . Матрица системы линейного приближения в окрестности точки  $M$  имеет вид  $\begin{pmatrix} \frac{d}{a} & -1 \\ -1 & -\frac{f}{c} \end{pmatrix}$ , ее собственные значения  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{f}{c}\right)^2 + 1}$  вещественны, различны и имеют разные знаки. Таким образом, при  $\mu = \frac{d}{a}$  состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$  также является седлом.

**2. Исследование состояний равновесия и поведения траекторий системы (2) при условии  $a = c = d = f$ .** Без ограничения общности можем записать систему (2) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + a(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + \mu y + a(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (6)$$

Проводя рассуждения, аналогичные пункту 1, получаем, что система (6) имеет два состояния равновесия  $O(0; 0)$  и  $M(x_0; y_0)$ , в котором  $x_0 = \frac{1-\mu}{2a}$ ,  $y_0 = -\frac{\mu+1}{2a}$ .

Рассмотрим состояние равновесия  $O(0; 0)$ , для которого  $\mu = 0$  является бифуркационным значением. Перейдем в системе (6) к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  и, исключая переменную  $t$ , получим дифференциальное уравнение относительно переменных  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho \frac{\rho A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)}, \quad (7)$$

в котором  $A(\varphi) = a(\sin \varphi + \cos \varphi)\cos \varphi$ ,  $B(\varphi) = a(\sin \varphi - \cos \varphi)$ . Выберем число  $\delta > 0$  так, чтобы для любого  $\rho \in [0; \delta]$  и при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$  выполнялось неравенство  $|\rho B(\varphi)| < 1$ , в силу которого правая часть уравнения (5) на множестве  $[0; 2\pi] \times [0; \delta]$  может быть разложена в ряд

$$\frac{\rho^2 A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{n+2} A(\varphi) B^n(\varphi),$$

сходящийся равномерно на отрезке  $[0; \delta]$  при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Вычисляя коэффициенты функции последования, получаем, что  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_i = 0$  при всех  $i = 3; 9$ . Для исследования поведения траекторий уравнения (7), а вместе с ним и системы (6), в окрестности точки  $O(0; 0)$  запишем соответствующее уравнение в вариациях:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho \frac{\rho(\varphi, \rho_0) A(\varphi)}{1 - \rho(\varphi, \rho_0) B(\varphi)}, \quad (8)$$

где  $\rho(\varphi, \rho_0)$  – решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ ,  $\rho \in [0; \delta]$  и  $\rho_0 \in [0; \delta]$  при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Тогда решение уравнения (8), удовлетворяющее условию  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ , имеет вид:

$$\rho(\varphi, \rho_0) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^\varphi \frac{\rho(\xi, \rho_0) A(\xi) d\xi}{1 - \rho(\xi, \rho_0) B(\xi)}\right), \quad (9)$$

а условие существования ненулевого  $2\pi$ -периодического решения уравнения (8), а вместе с ним и уравнения (7) можно записать так:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho(\xi, \rho_0) A(\xi) d\xi}{1 - \rho(\xi, \rho_0) B(\xi)} = 0. \quad (10)$$

Так как  $\rho_0 \in [0; \delta]$  и  $\rho \in [0; \delta]$  при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , то решение  $\rho(\varphi, \rho_0)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ , можно представить в виде  $\rho(\varphi, \rho_0) = \rho_0 + o(\rho_0)$ . С учетом этого (10) можно представить следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \rho_0^{k+1} A(\xi) B^k(\xi) + o(\rho_0^{k+1}) A(\xi) B^k(\xi) \right) d\xi = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим интегралы вида  $\int_0^{2\pi} A(\xi)B^k(\xi)d\xi$ .

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что при всех  $k = 2n + 1, n \in \mathbf{N}$ , справедливо

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} A(\xi)B^k(\xi)d\xi = \\ & = \int_0^{2\pi} (\sin \xi + \cos \xi)(\sin \xi - \cos \xi)^{2n+1} d\xi = \\ & = - \int_0^{2\pi} \cos 2\xi (1 - \sin 2\xi)^n d\xi = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \sin 2\xi)^n d(1 - \sin 2\xi) = \frac{(1 - \sin 2\xi)^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

При всех  $k = 2n, n \in \mathbf{N}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} A(\xi)B^k(\xi)d\xi = \\ & = \int_0^{2\pi} (\sin \xi + \cos \xi)(\sin \xi - \cos \xi)^{2n} d\xi = \\ & = \int_0^{2\pi} (\sin \xi + \cos \xi) \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i \sin^i \xi \cos^{2n-i} \xi d\xi = \\ & = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i \int_0^{2\pi} (\sin^{i+1} \xi \cos^{2n-i} \xi + \sin^i \xi \cos^{2n-i+1} \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Так как при  $i$  четном число  $i + 1$  – нечетное,  $2n - i$  – четное,  $2n - i + 1$  – нечетное, то

$$\int_0^{2\pi} A(\xi)B^k(\xi)d\xi \equiv 0. \text{ Поэтому при всех } k \in \mathbf{N} \int_0^{2\pi} A(\xi)B^k(\xi)d\xi \equiv 0, \text{ а левая часть выражения (11)}$$

тождественно обращается в нуль. Следовательно, при всех  $\rho_0 \in [0; \delta]$  решение уравнения (7)  $\rho(\varphi, \rho_0)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\rho(0, \rho_0) = \rho_0$ , является  $2\pi$ -периодическим, а состояние равновесия  $O(0; 0)$  системы (6) – центром.

Рассмотрим состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$ , в котором  $x_0 = \frac{1-\mu}{2a}, y_0 = -\frac{\mu+1}{2a}$ . Матрица системы линейного приближения в окрестности точки  $M$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}$ , ее собственные значения  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu^2 + 1}$  при любом  $\mu$  вещественны, различны и имеют разные знаки. Таким образом, при любом  $\mu$  состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$  является седлом.

Проиллюстрируем полученные результаты на примерах.

**Пример 1.** Пусть система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + 3x^2 + 1y^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y + 6x^2 + 2y^2. \end{cases} \quad (12)$$

Фазовые портреты и фазовые траектории системы (12) при  $\mu \in [-1; 1]$  представлены на рисунках 1–23. На рисунках 1–5, 7, 10, 14, 18, 20–23  $t \in [-2\pi; 2\pi]$ . Численный эксперимент показал, что при данных значениях коэффициентов  $a, c, d, f$  и при значениях параметра  $\mu \in [-1; 1]$  состояние равновесия  $M(x_0; y_0)$  является седлом. На рисунках 6 и 7 показано, что состояние равновесия  $O(0; 0)$  является устойчивым фокусом.

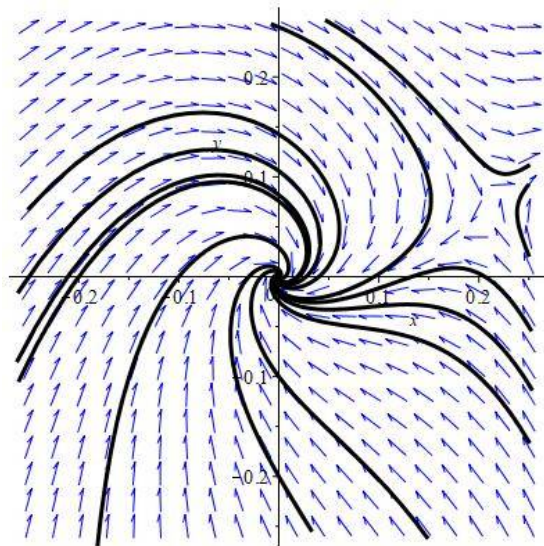


Рис. 1. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -1$

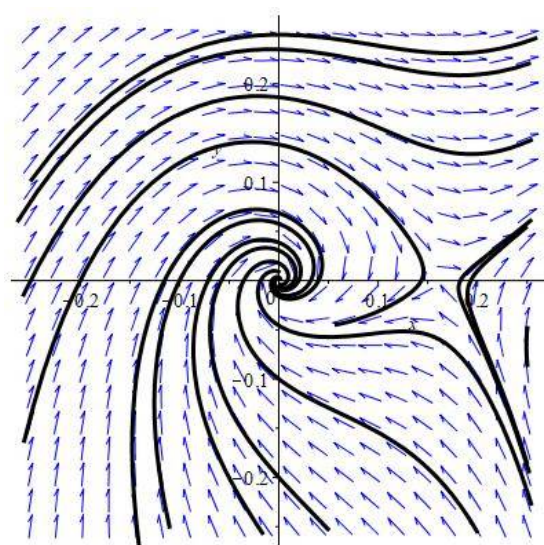
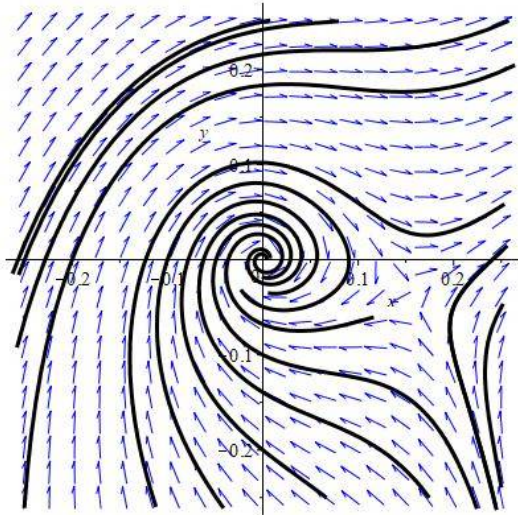
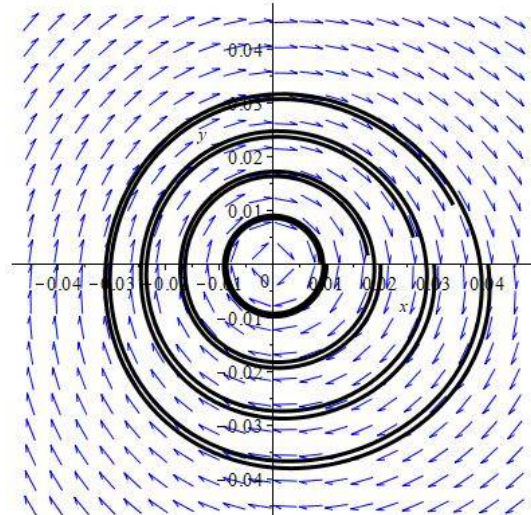
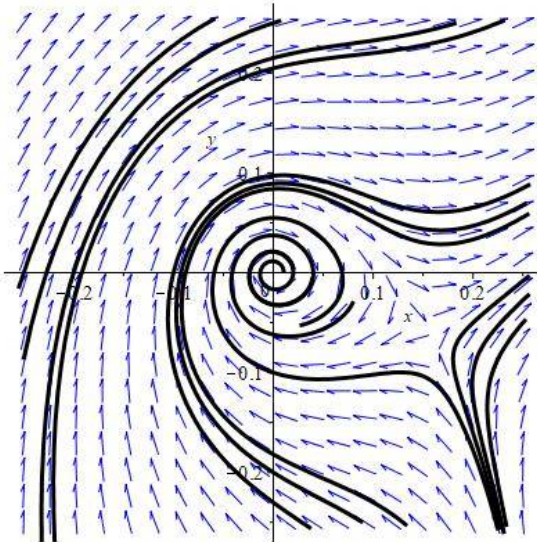
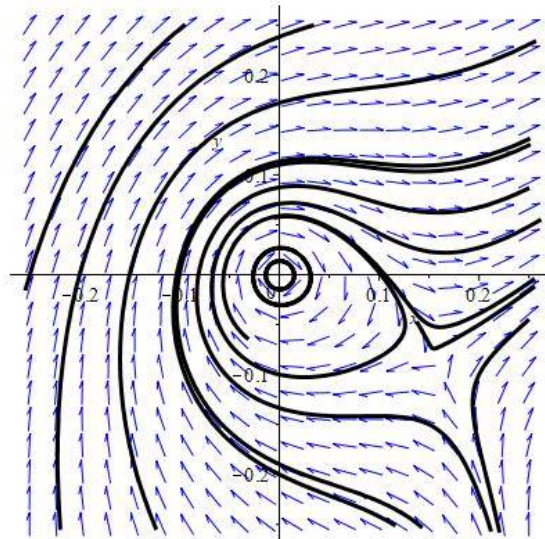
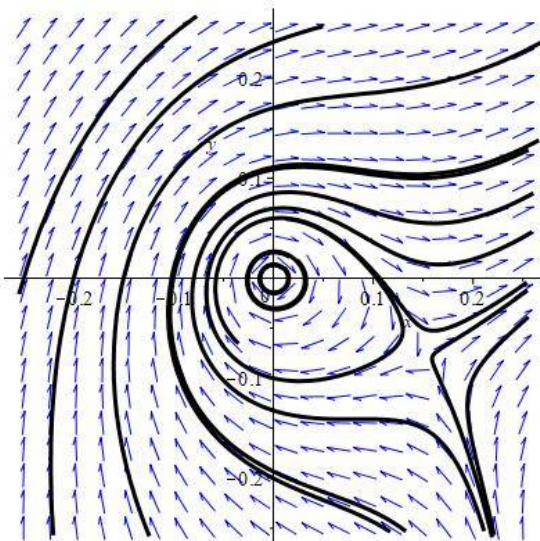


Рис. 2. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,5$

Рис. 3. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,25$ Рис. 6. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,01$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$ Рис. 4. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,1$ Рис. 7. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,001$ Рис. 5. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,01$ 

Фазовый портрет существенно меняется при  $\mu = -0,001$ . На рисунке 8 показано, что вне окрестности радиуса 0,02 траектории системы (12) удаляются от состояния равновесия  $O(0; 0)$ . На рисунке 9 представлен фазовый портрет и траектории системы (12) внутри окружности радиуса 0,02. Численный эксперимент показал, что вне окружности радиуса 0,017 траектории системы (12) удаляются от состояния равновесия  $O(0; 0)$ , а внутри окружности радиуса 0,015 – приближаются к нему, то есть точка  $O(0; 0)$  – устойчивый фокус, а в кольце  $0,15^2 \leq x^2 + y^2 \leq 0,17^2$  расположен неустойчивый предельный цикл. Вопрос о существовании второго предельного цикла при значении параметра  $\mu = -0,001$  остается открытым. Возможно возникновение второго предельного цикла при  $\mu \rightarrow 0 - 0$ .

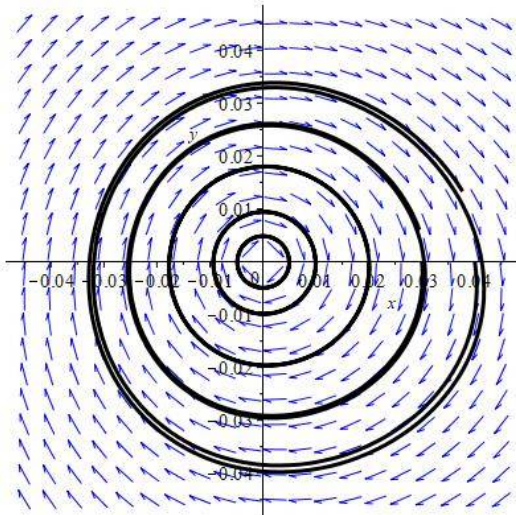


Рис. 8. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$

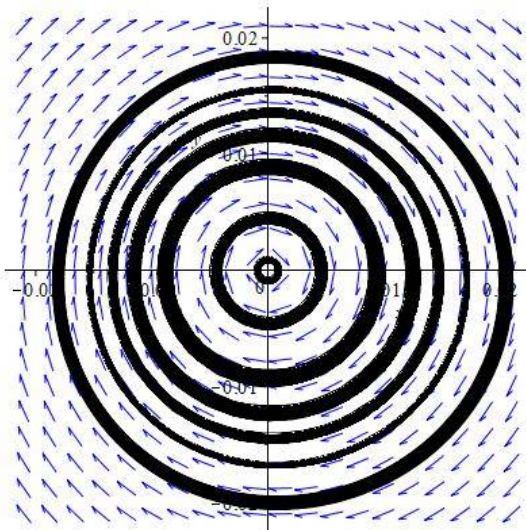


Рис. 9. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = -0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 60\pi]$

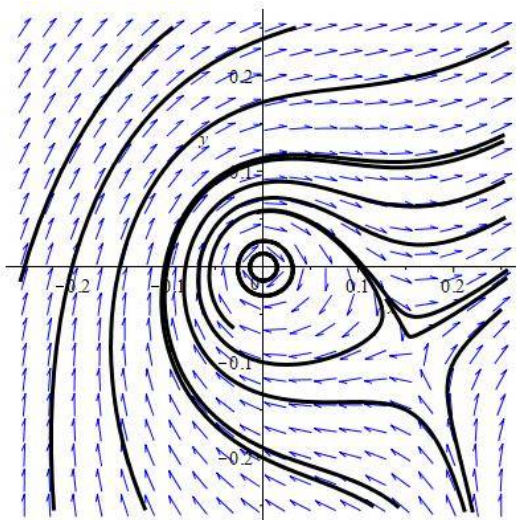


Рис. 10. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0$

Численное исследование поведения траекторий системы (12) в окрестности состояния равновесия  $O(0; 0)$  при  $\mu = 0$  показало, что вне окружности радиуса 0,001 траектории удаляются от состояния равновесия  $O(0; 0)$  (рис. 11, 12). Поведение траекторий внутри этой окружности при  $t \in [0; 100\pi]$  показано на рисунке 13.

При  $\mu = 0,001$  состояние равновесия  $O(0; 0)$  является неустойчивым фокусом (рис. 14–17).

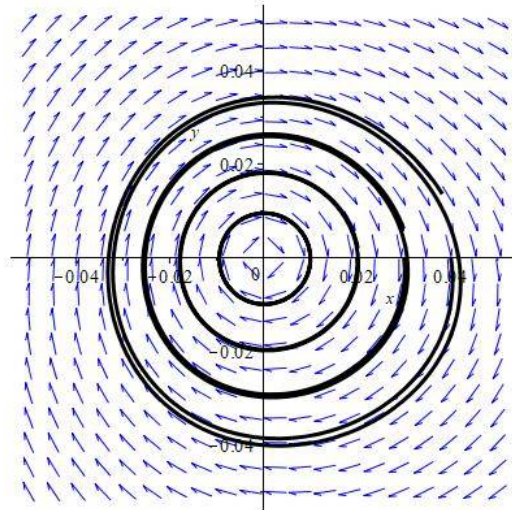


Рис. 11. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$

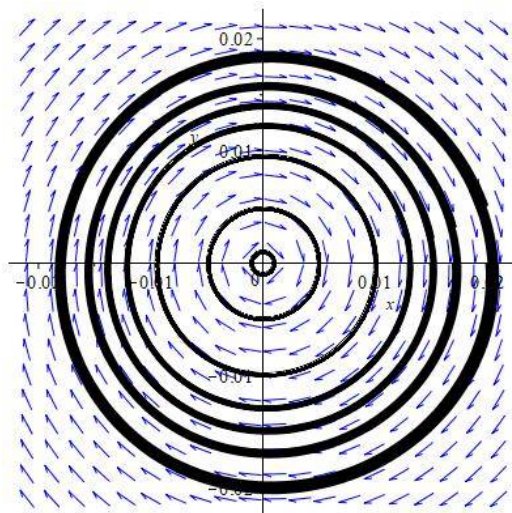


Рис. 12. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 10\pi]$

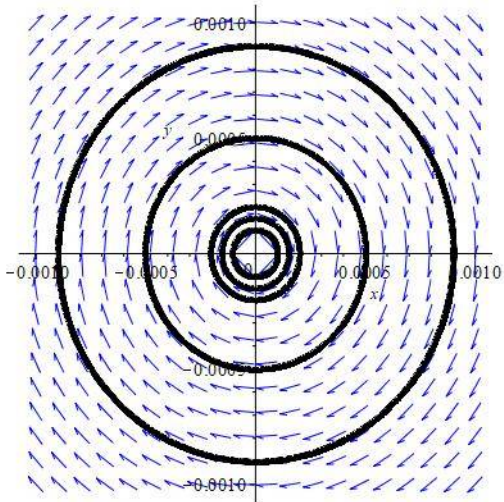


Рис. 13. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 100\pi]$

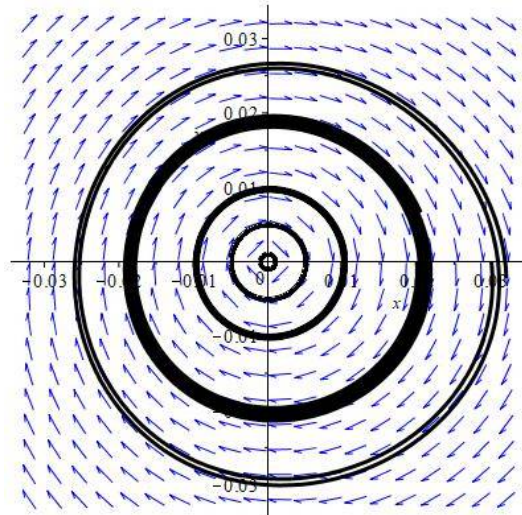


Рис. 16. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 12\pi]$

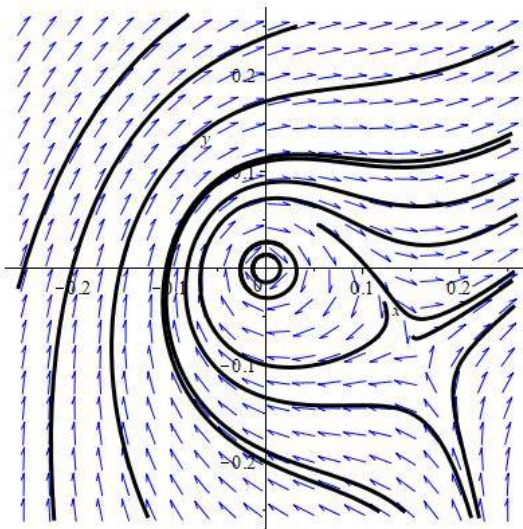


Рис. 14. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,001$

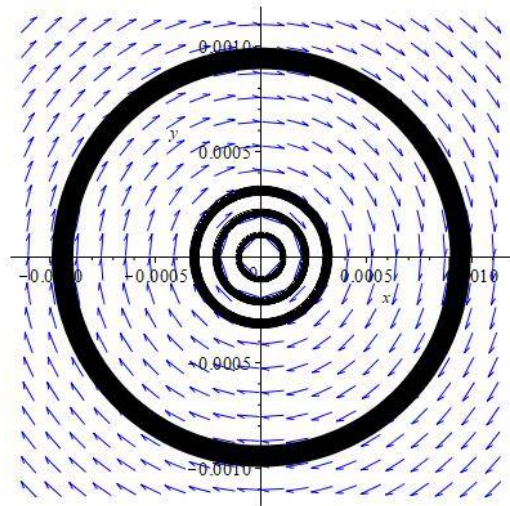


Рис. 17. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 30\pi]$

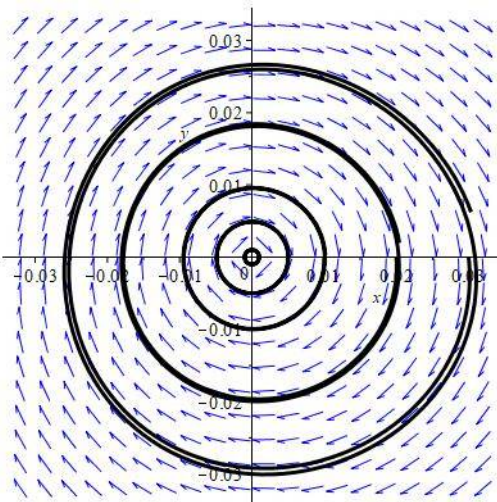


Рис. 15. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$

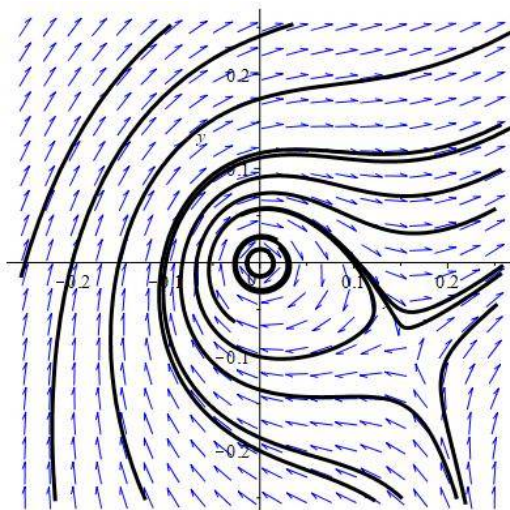


Рис. 18. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,01$

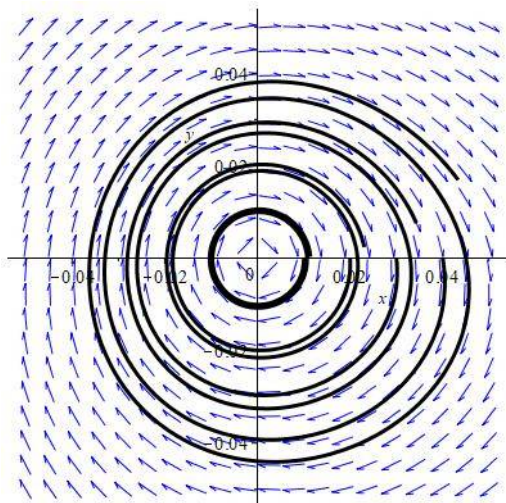


Рис. 19. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,01$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$

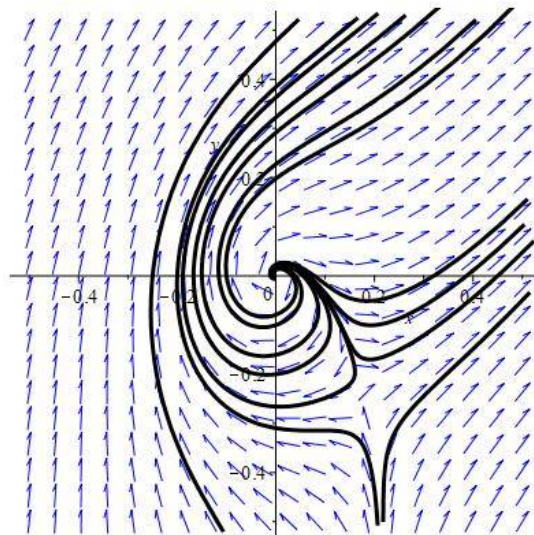


Рис. 22. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,5$

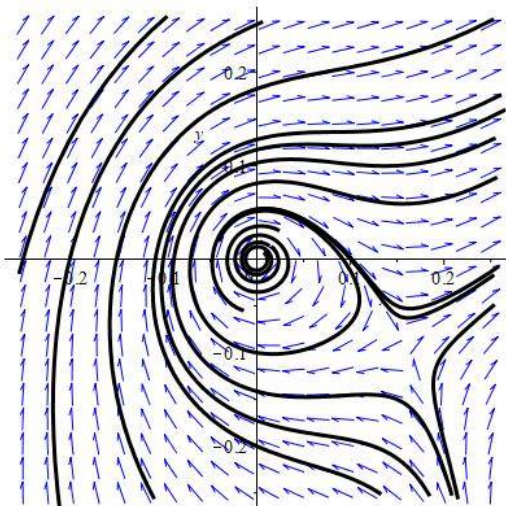


Рис. 20. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,1$

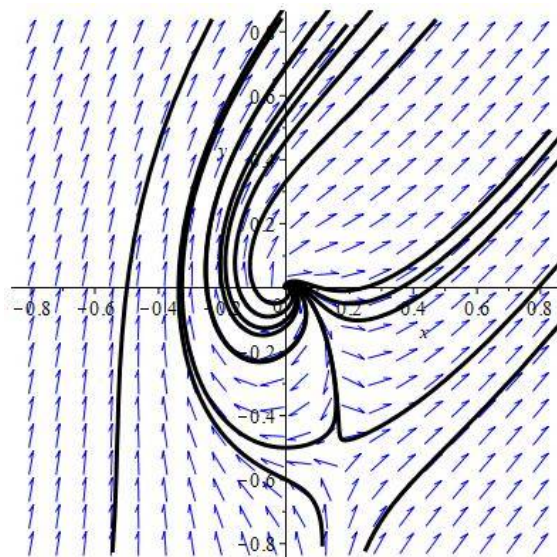


Рис. 23. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 1$

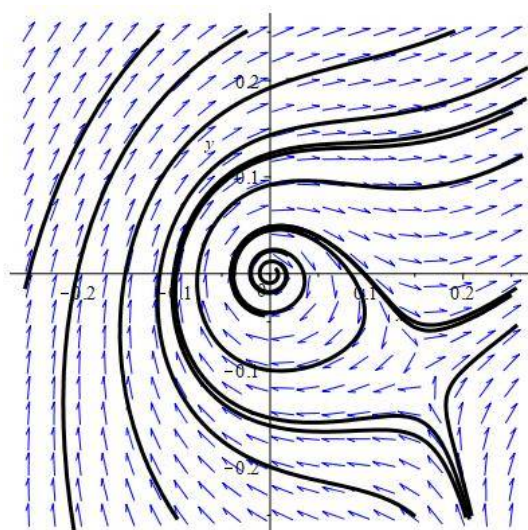


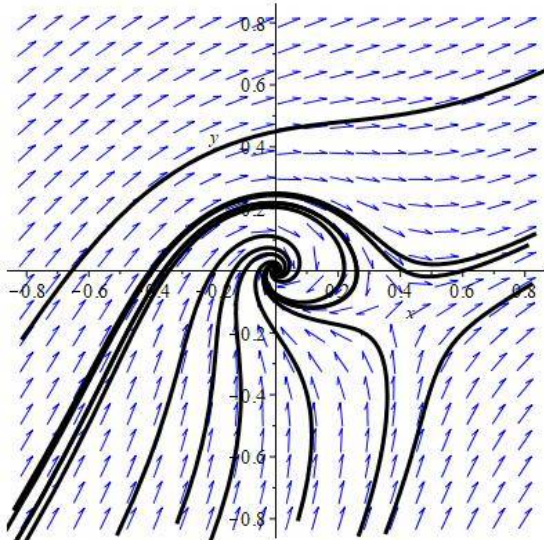
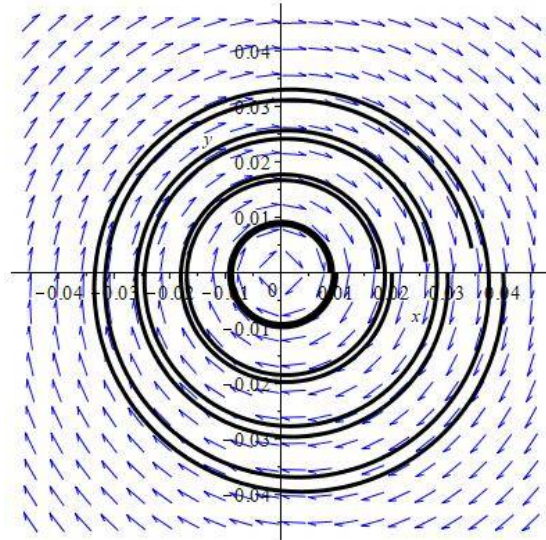
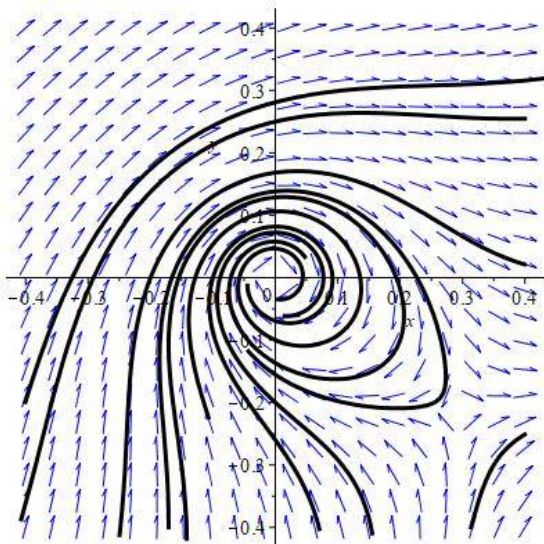
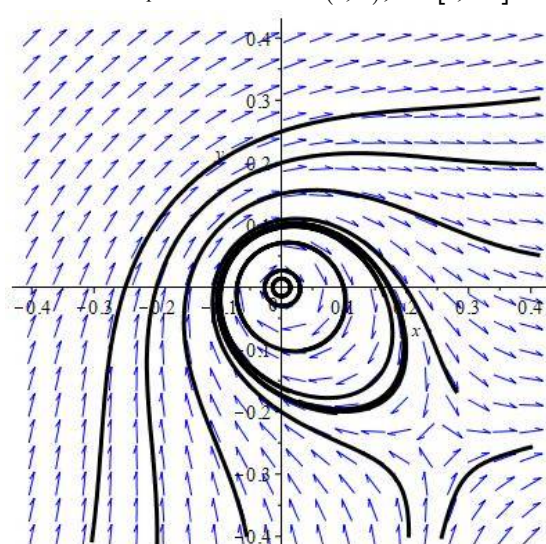
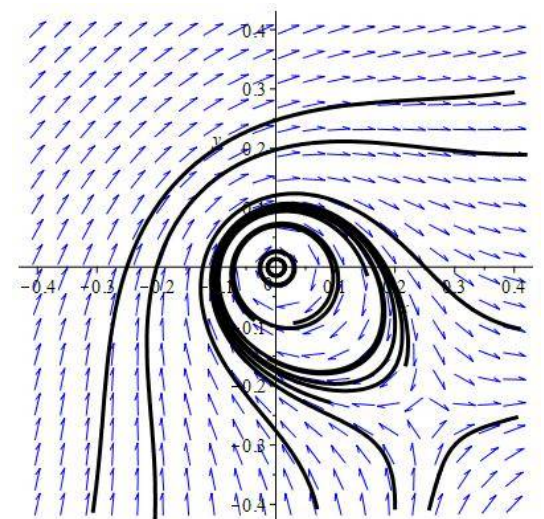
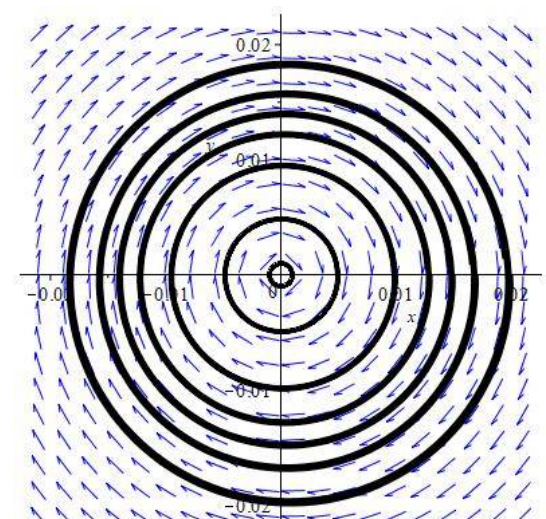
Рис. 21. Фазовый портрет системы (12) при  $\mu = 0,25$

**Пример 2.** Пусть система (6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + 2(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + \mu y + 2(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (13)$$

Фазовые портреты и фазовые траектории системы (13) представлены на рисунках 24–37 при  $\mu \in [-0,5; 0,5]$ . На рисунках 24–26, 28, 30, 32, 34–37  $t \in [-2\pi; 2\pi]$ . На рисунках 27 и 29 состояние равновесия  $O(0; 0)$  является устойчивым фокусом, а на рисунках 33 и 35 – неустойчивым фокусом. Фазовый портрет системы (13) в малой окрестности начала точки  $O(0; 0)$  при  $\mu = 0$  (рис. 8–9) представлен на рисунке 31.



Рис. 24. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,5$ Рис. 27. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,01$   
в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$ Рис. 25. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,15$ Рис. 28. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,001$ Рис. 26. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,01$ Рис. 29. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = -0,001$   
в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 8\pi]$

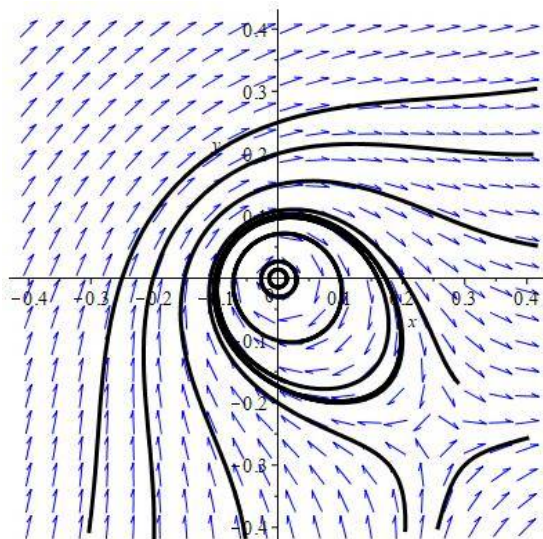


Рис. 30. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0$

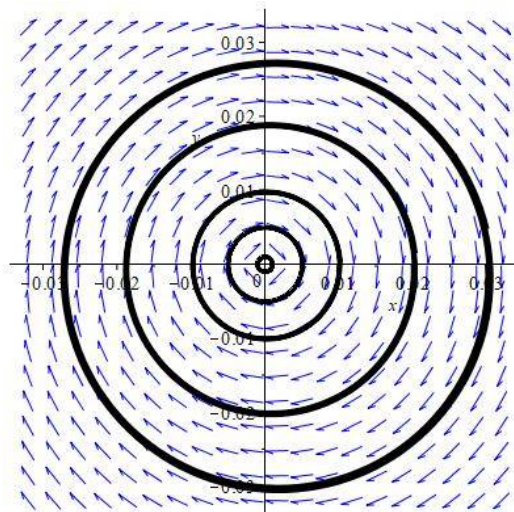


Рис. 33. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,001$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 8\pi]$

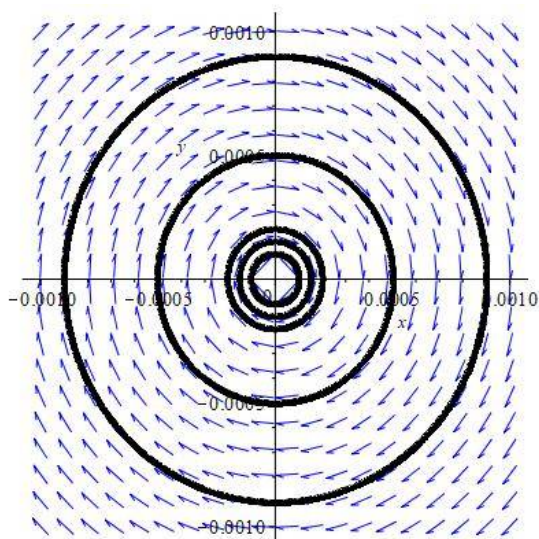


Рис. 31. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 100\pi]$

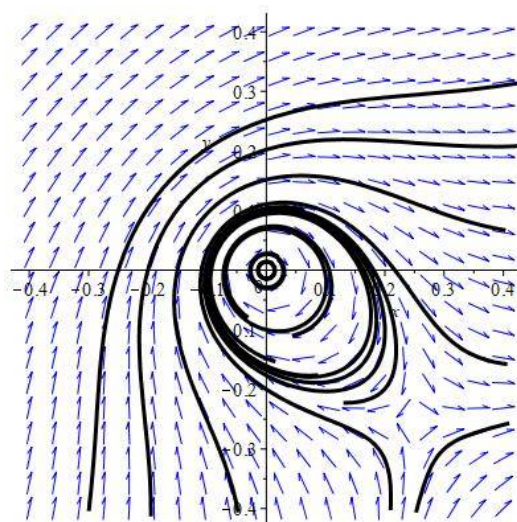


Рис. 34. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,01$

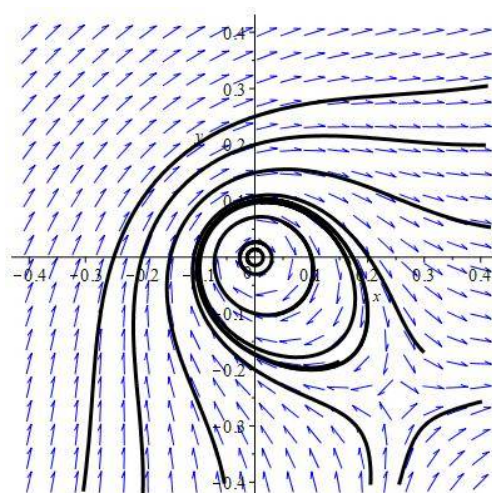


Рис. 32. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,001$

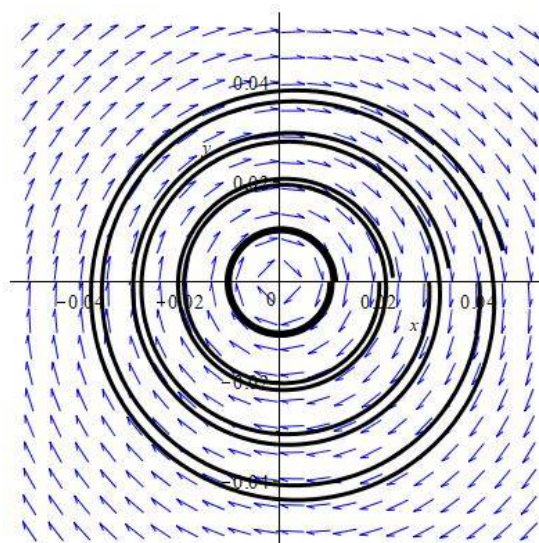


Рис. 35. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,01$  в малой окрестности точки  $O(0; 0)$ ,  $t \in [0; 4\pi]$

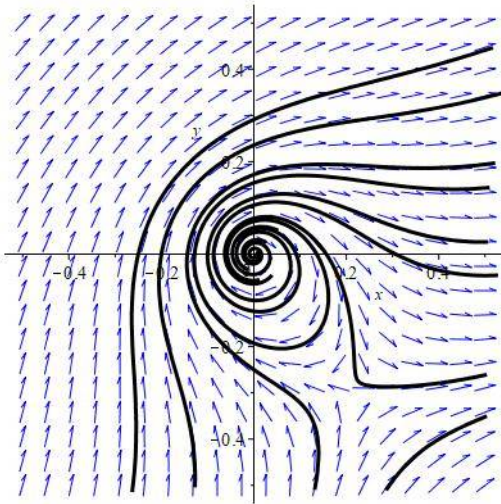


Рис. 36. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,15$

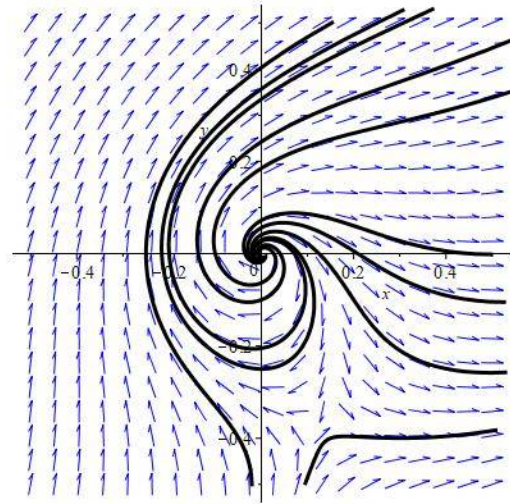


Рис. 37. Фазовый портрет системы (13) при  $\mu = 0,5$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Арнольд В.И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. : МЦНМО, 2004. – 32 с.
2. **Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Николаичев А.Н.** Математические модели нелинейных динамических процессов в социологии // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. / под. ред. Г.Ю. Ризниченко. – М. : Прогресс-Традиция, 2000. – Вып. 7, ч. II. – С. 437–443.
3. **Лискина Е.Ю., Митюнина Е.В.** Исследование модели социально-политического управления // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2006. – № 11. – С. 141–148.
4. **Лискина Е.Ю., Черномордова Г.А.** Бифуркации числа состояний равновесия в модели социально-политического управления // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2009. – № 14. – С. 80–86.
5. **Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М. : Наука, 1991. – 486 с.

Лискина Екатерина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 97-15-25; e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru

УДК 517.91

КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ  
ФАЗОВОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.С. Мамонов, А.О. Харламова, И.В. Ионов

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

VIBRATIONAL-REVOLUTION CYCLES  
PHASE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.S. Mamonov, A.O. Kharlamova, I.V. Ionova

В работе рассматривается нефазовая система дифференциальных уравнений, для которой получены условия существования колебательных циклов. С использованием циклов нефазовой системы и вращения векторного поля определяются циклы фазовой системы. Проведен сравнительный анализ близости циклов нефазовой и фазовой систем. Показывается, что изменение одного из параметров фазовой системы приводит к появлению колебательно-вращательных циклов различной структуры.

*Ключевые слова:* система дифференциальных уравнений, колебательно-вращательные циклы, фазовая система, мультипликаторы.

**Введение.** В работе рассматривается нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + u\psi(\sigma), \quad (1)$$

где  $x, b, c \in \mathbf{R}^2$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\psi(\sigma) = \nu_1 / \beta_1 \varphi(\sigma) - \alpha_1 \sigma$ , которая в случае параметра  $u = 0$  трансформируется в фазовую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x. \quad (1_0)$$

Рассматривается вспомогательная система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\beta_1 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) - \varepsilon, \quad \dot{\sigma} = y + u\psi(\sigma). \quad (2)$$

Система (1) при значении  $u = 0$  представляет собой математическую модель системы фазовой автоподстройки частоты, рассмотренную в работах [1–3]. В статье продолжены исследования, проведенные в работах [4, 5]. Решается задача определения колебательных циклов фазовой системы (1<sub>0</sub>) с помощью циклов нефазовой системы (1) и системы дифференциальных уравнений второго порядка (2). На основе мультипликаторных и метрических характеристик проведен численный анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем.

**Теоретические исследования.** Аналитические условия, обеспечивающие существование колебательного цикла системы (1), сформулированы в работе [5]. Было показано, что при  $\alpha_1 = 0.3777$ ,  $\beta_1 = 0.2787$ ,  $\Gamma = 2.4714$ ,

The paper deals with a non-phase system of differential equations for which the conditions for the existence of oscillatory cycles are obtained. Using cycles of a non-phase system and rotation of a vector field, the cycles of the phase system are determined. A comparative analysis of the closeness of the cycles of the non-phase and phase systems is carried out. It is shown that a change in the parameter of the phase system leads to the appearance of vibrational-rotational cycles of different structures.

*Keywords:* system of differential equations, vibrational-rotational cycles, phase system, multipliers.

$\nu_1 = -0.12$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $u = 0.89$  система (1) имеет колебательный цикл с начальными условиями  $x_1 = 0.00103$ ,  $x_2 = 0.8684$ ,  $\sigma = 0.412$ .

**Пример 1.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), где  $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ , тогда  $c^T b = -\Gamma$ ,  $c^T A = l^T$ ,  $l^T b = -\nu_1 < 0$ ,  $\text{rang}\|c, l\| = 2$ ,  $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$ ,  $c^T A^{-1} b \neq 0$  и систему (2) при  $\varepsilon = 0$ . Пусть  $\alpha_1 = 0.35$ ,  $\beta_1 = 0.2787$ ,  $\Gamma = 2.47$ ,  $\nu = -0.12$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $u = 1$ . Система второго порядка (2) имеет колебательный цикл  $A(y_0; \sigma_0)$ , определяемый начальными условиями  $y_0 = 1.4201$ ,  $\sigma_0 = 0.412$ . Цикл системы второго порядка  $A(y_0; \sigma_0)$  определяет цикл нефазовой системы третьего порядка (1)  $B(x_1; x_2; \sigma)$  при  $u = 1$ , в случае  $x_1 = -\beta_1 \sigma_0$ ,  $x_2 = y_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ , где  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1.4201$ ,  $\sigma = 0.412$ .

Рассмотрим множество  $\omega_2 = \{(\sigma, x): x_1^2 + (x_2 - 1.4)^2 = 0.2^2\}$ . Пусть  $U_3$  – оператор сдвига по траекториям системы (1)  $U_3(\omega_2) \subset \{z: \sigma = 0, c^T x > 0\}$  и траектория, соединяющая точки  $x^* \in \omega_2$ ,  $U_3(x^*)$ , пересекает множество  $\{z: \sigma = 0, c^T x < 0\}$  в одной

точке. Обозначим  $Q_3(x) = x - U_3(x)$  – вращение векторного поля оператора  $U_3$  [6]. Множество  $\omega_2$  при  $u=1$  содержит неподвижную точку оператора  $U_3$ , определяющую начальные условия цикла первого рода системы (1), при этом вращение векторного поля  $Q_3$  на границе  $\partial\omega_2$  множества  $\omega_2$  отлично от нуля,  $\gamma(Q_3, \partial\omega_2) \neq 0$ .

Уменьшим значение параметра  $u$  с 1 до 0, при этом нефазовая система (1) превратится в фазовую систему  $(I_0)$ . Пусть  $U_4$  – оператор сдвига по траекториям системы (1), а  $Q_4(x) = x - U_4(x)$  – вращение векторного поля оператора  $U_4$ . Численно показывается, что  $\gamma(Q_4, \partial\omega_2) \neq 0$ , тогда оператор  $U_4$  при  $x_1 = 0.0256$ ,  $x_2 = 1.3024$ ,  $\sigma = 0.412$  имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла первого рода фазовой системы  $(I_0)$ . На рисунке 1 изображены линии  $P_3$  при  $u=1$  и  $P_4$  при  $u=0$ , описываемые векторами  $Q_3(x) = x - U_3(x)$  и  $Q_4(x) = x - U_4(x)$  соответственно.

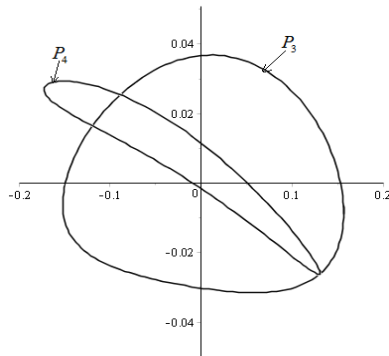


Рис. 1. Линии  $P_3$  и  $P_4$

На рисунке 2 показано взаимное расположение проекций предельных циклов  $z_1(t)$  при  $u=1$  и  $z_2(t)$  при  $u=0$  на плоскость  $(x_1; x_2)$ .

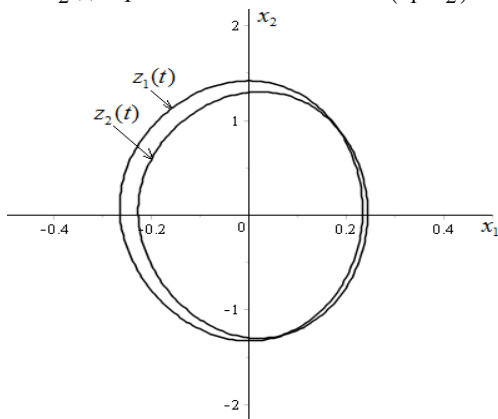


Рис. 2. Проекция циклов  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$

Для системы (1) проведен численный анализ мультипликаторов в случае  $u=1$  и  $u=0$ . Мультипликаторный коэффициент аппроксимации циклов  $A_\rho = 10.11\%$ . Проводя метрический анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем, получим следующие графики, определяющие искомое расстояние, изображенные на рисунке 3.

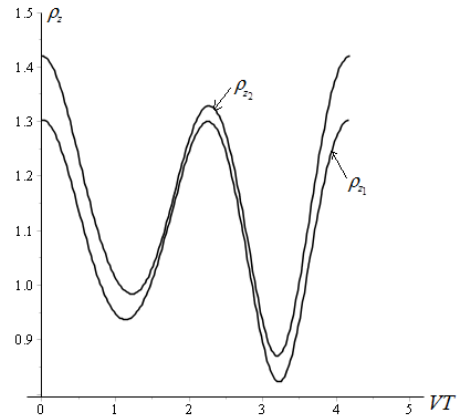


Рис. 3. Графики расстояний  $\rho_{z_1}(t)$  и  $\rho_{z_2}(t)$  для фазовой и нефазовой систем

Коэффициент линейной корреляции и индекс корреляции для системы (1) при заданных параметрах соответственно равны  $r_{12} = 0.9766$  и  $R = 0.8991$ . Проверив значимость полученных характеристик с помощью критерия Фишера получили, что имеет место сильная значимость связи. На рисунке 4 изображен график корреляции для системы (1).

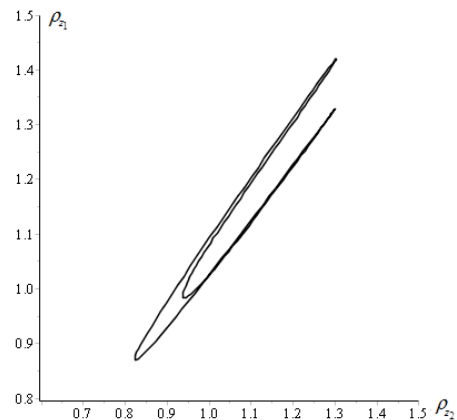


Рис. 4. График корреляции системы (1)

Изучение системы (1) сводится к нахождению цикла первого рода системы второго порядка (2). Состояния равновесия системы (2) определяются уравнением  $(\beta_1\sigma + \Gamma\varphi(\sigma)) = 0$ . В рассматриваемом примере у системы (2) наблюдается семь состояний равновесия. На рисунке 5 изображен фазовый портрет системы (2), где состояния равновесия  $A_1, A_3, A_6, A_7$  – фокусы,  $A_2, A_4, A_5$  – седла,  $y = f_0(\sigma)$  – цикл системы.

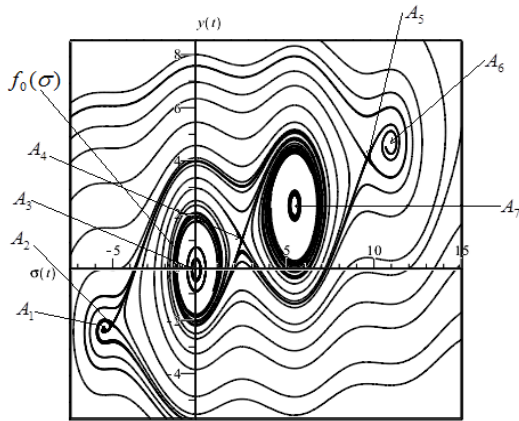


Рис. 5. Фазовый портрет системы (2)

**Пример 2.** В работе [5] показано, что при  $\alpha_1 = 0.377$  у системы  $(I_0)$  существует устойчивый колебательный цикл  $z_k^+(t)$ , два устойчивых колебательно-вращательных цикла  $z_{4\pi(1;0)}^+(t)$  и  $z_{4\pi(0;1)}^+(t)$  с периодом  $4\pi$ .

Далее будет показано, что уменьшение параметра  $\alpha_1$  приводит к тому, что у фазовой системы  $(I_0)$  появляются как устойчивые колебательные, неустойчивые вращательные, так и несколько колебательно-вращательных циклов различной структуры.

При  $\alpha_1 = 0.305$  у нефазовой системы (1) существуют следующие предельные циклы. Один вращательный неустойчивый цикл  $z_{2\pi,6}^-(t)$  с начальными условиями  $x_1 = -1.051578$ ,  $x_2 = 3.28235$ ,  $\sigma = 0.412$  и мультипликаторами  $\mu_1 = 1.0000245$ ,  $\mu_2 = -16.252848$ ,  $\mu_3 = -0.010251$ .

Устойчивый колебательный цикл  $z_k^+(t)$  с начальными условиями  $x_1 = 0.05828$ ,  $x_2 = 1.7348$ ,  $\sigma = 0.412$  и мультипликаторами  $\mu_1 = 1.000852$ ,  $\mu_2 = 0.275204$ ,  $\mu_3 = 0.938955$ , для которого  $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0011$ .

Система  $(I_0)$  при  $\alpha_1 = 0.305$  имеет два неустойчивых колебательно-вращательных цикла  $z_{4\pi,(1;0)}^-(t)$  и  $z_{4\pi,(0;1)}^-(t)$ , где цикл  $z_{4\pi,(0;1)}^-(t)$  с начальными условиями  $x_1 = -1.116723$ ,  $x_2 = 3.364445$ ,  $\sigma = 0.412$ , мультипликаторы равны  $\mu_1 = 1.000089$ ,  $\mu_2 = -1.107821$ ,  $\mu_3 = -0.0221104$ , а цикл  $z_{4\pi,(1;0)}^-(t)$  определяется начальными условиями  $x_1 = -1.205654$ ,  $x_2 = 3.068768$ ,  $\sigma = 0.412$ , мультипликаторы:

$$\mu_1 = 1.00007614, \mu_2 = -1.099677, \mu_3 = -0.021952.$$

У системы  $(I_0)$  также существуют три неустойчивых колебательно-вращательных цикла  $z_{6\pi,(0;1;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi,(1;0;1)}^-(t)$  и  $z_{6\pi,(1;1;0)}^-(t)$ . Для цикла  $z_{6\pi,(0;1;1)}^-(t)$  с начальными условиями  $x_1 = -0.936865$ ,  $x_2 = 3.500175$ ,  $\sigma = 0.412$  мультипликаторы равны  $\mu_1 = 1.0000476$ ,  $\mu_2 = -7.135543$ ,  $\mu_3 = -0.004486$ .

У цикла  $z_{6\pi,(1;0;1)}^-(t)$  следующие характеристики:  $x_1 = -1.118186$ ,  $x_2 = 3.30962$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.000299$ ,  $\mu_2 = -4.60979$ ,  $\mu_3 = 0.031974$ .

Для цикла  $z_{6\pi,(1;1;0)}^-(t)$   $x_1 = -1.461476$ ,  $x_2 = 3.001026$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.0000777$ ,  $\mu_2 = -5.641734$ ,  $\mu_3 = 0.004075$ .

Существуют четыре устойчивых колебательно-вращательных цикла  $z_{8\pi,(0;1;0;1)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi,(1;0;1;0)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi,(0;1;0;1)}^+(t)$  и  $z_{8\pi,(1;0;1;0)}^+(t)$ . Для цикла  $z_{8\pi,(0;1;0;1)}^+(t)$   $x_1 = -1.118045$ ,  $x_2 = 3.382592$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.00001849$ ,  $\mu_2 = 0.000944$ ,  $\mu_3 = 0.611009$ .

У цикла  $z_{8\pi,(1;0;1;0)}^+(t)$   $x_1 = -1.24793$ ,  $x_2 = 3.01977$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.00001345$ ,  $\mu_2 = 0.0009703$ ,  $\mu_3 = 0.603219$ . Для цикла  $z_{8\pi,(0;1;0;1)}^+(t)$   $x_1 = -1.108$ ,  $x_2 = 3.347269$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.0000115$ ,  $\mu_2 = 0.0005333$ ,  $\mu_3 = 0.59149$ .

У цикла  $z_{8\pi,(1;0;1;0)}^+(t)$   $x_1 = -1.171708$ ,  $x_2 = 3.112236$ ,  $\sigma = 0.412$  и  $\mu_1 = 1.00004744$ ,  $\mu_2 = 0.0009556$ ,  $\mu_3 = 0.605798$ .

На рисунке 6 изображены окрестности предельных циклов фазовой системы  $(I_0)$  при  $\alpha_1 = 0.305$ .

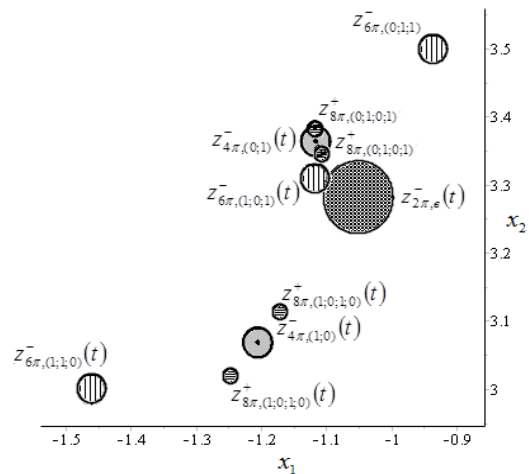


Рис. 6. Окрестности циклов системы  $(I_0)$  при  $\alpha_1 = 0.305$

На рисунках 7а, б изображены проекции циклов  $z_k^+(t)$ ,  $z_{2\pi, \theta}^-(t)$ ,  $z_{4\pi, (1;0)}^-(t)$  и  $z_{4\pi, (0;1)}^-(t)$  на плоскости  $(x_1, x_2)$  и  $(x_2, \sigma)$ .

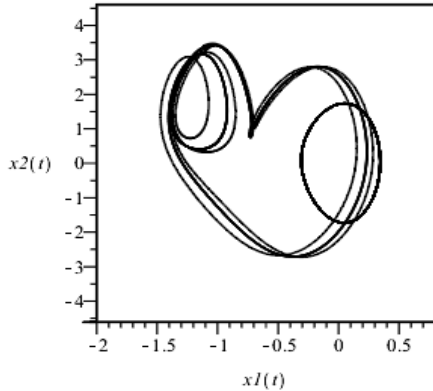


Рис. 7а. Проекция циклов  $z_k^+(t)$ ,  $z_{2\pi, \theta}^-(t)$ ,  $z_{4\pi, (1;0)}^-(t)$  и  $z_{4\pi, (0;1)}^-(t)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$

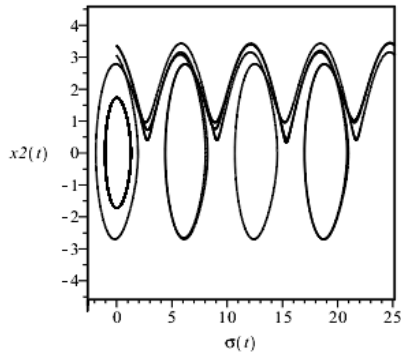


Рис. 7б. Проекция циклов  $z_k^+(t)$ ,  $z_{2\pi, \theta}^-(t)$ ,  $z_{4\pi, (1;0)}^-(t)$  и  $z_{4\pi, (0;1)}^-(t)$  на плоскость  $(x_2, \sigma)$

На рисунках 8а, б изображены проекции циклов  $z_{6\pi, (0;1;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;0;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;1;0)}^-(t)$ .

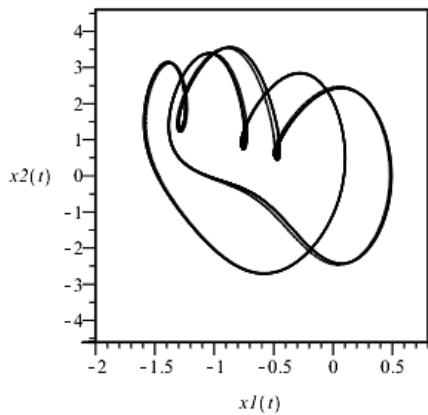


Рис. 8а. Проекция циклов  $z_{6\pi, (0;1;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;0;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;1;0)}^-(t)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$

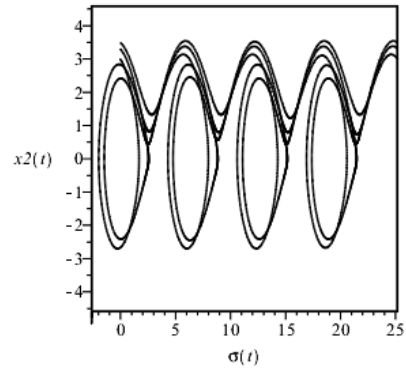


Рис. 8б. Проекция циклов  $z_{6\pi, (0;1;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;0;1)}^-(t)$ ,  $z_{6\pi, (1;1;0)}^-(t)$  на плоскость  $(x_2, \sigma)$

На рисунках 9а, б представлены проекции полученных циклов  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$  и  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$  на плоскости  $(x_1, x_2)$  и  $(x_2, \sigma)$  соответственно.

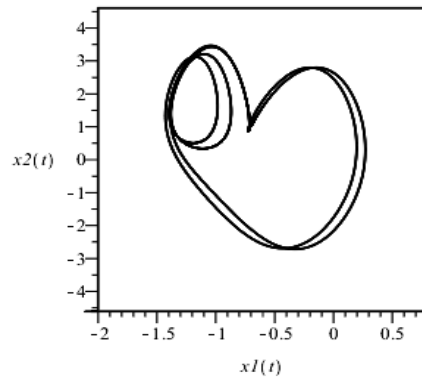


Рис. 9а. Проекция циклов  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$  и  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$

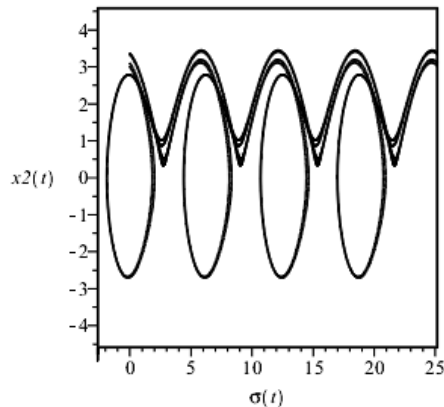


Рис. 9б. Проекция циклов  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$ ,  $z_{8\pi, (0;1;0;1)}^+(t)$  и  $z_{8\pi, (1;0;1;0)}^+(t)$  на плоскость  $(x_2, \sigma)$

На рисунке 10 изображены все полученные циклы системы (1<sub>0</sub>) при α<sub>1</sub> = 0.305.

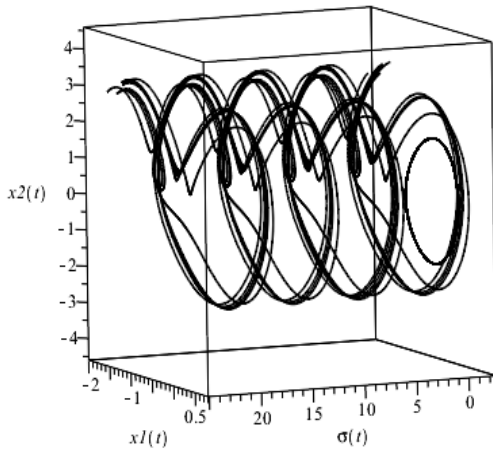


Рис. 10. Циклы системы (1<sub>0</sub>) при α<sub>1</sub>=0.305

Дальнейшее уменьшение α<sub>1</sub> приводит к появлению следующего сценария колебательно-вращательных циклов системы (1<sub>0</sub>). При α<sub>1</sub> = 0.3034 существует неустойчивый колебательно-вращательный цикл z<sub>6π,(1;0;1)</sub><sup>-</sup>(t), x<sub>1</sub> = -1.1145, x<sub>2</sub> = 3.3076, σ = 0.412 (рис. 11а), который при α<sub>1</sub> = 0.255 трансформируется в неустойчивый цикл z<sub>6π,(1;0;1)</sub><sup>-</sup>(t) с начальными условиями x<sub>1</sub> = -1.068, x<sub>2</sub> = 3.3149, σ = 0.412.

При α<sub>1</sub> = 0.238 система имеет устойчивый цикл z<sub>2π,(1)</sub><sup>+</sup>(t) (рис. 11б), для которого x<sub>1</sub> = -1.326, x<sub>2</sub> = 3.306, σ = 0.412 и он при α<sub>1</sub> = 0.174 переходит в неустойчивый цикл z<sub>2π,(1)</sub><sup>-</sup>(t) с начальными условиями x<sub>1</sub> = -1.413, x<sub>2</sub> = 2.949, σ = 0.412.

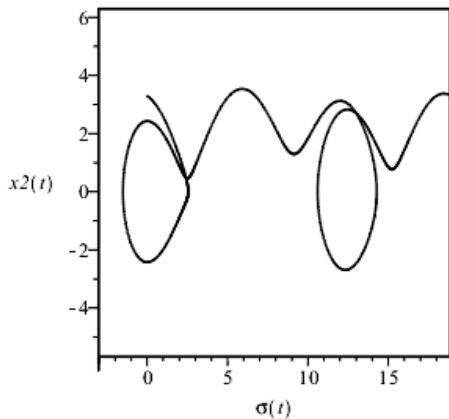


Рис. 11а. Цикл z<sub>6π,(1;0;1)</sub><sup>-</sup>(t) при α<sub>1</sub>=0.3034

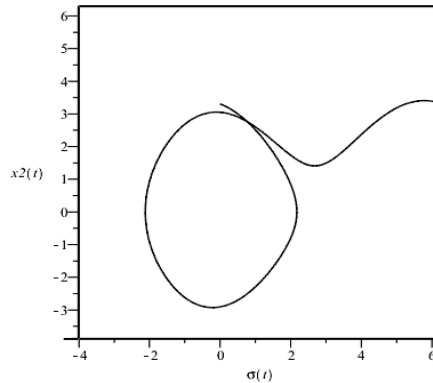


Рис. 11б. Цикл z<sub>2π,(1)</sub><sup>+</sup>(t) при α<sub>1</sub>=0.238

На рисунках 12а, б для циклов z<sub>6π,(1;0;1)</sub><sup>-</sup>(t) и z<sub>2π,(1)</sub><sup>+</sup>(t) изображены графики функций σ̇(t) = c<sup>T</sup>x = x<sub>2</sub>(t).

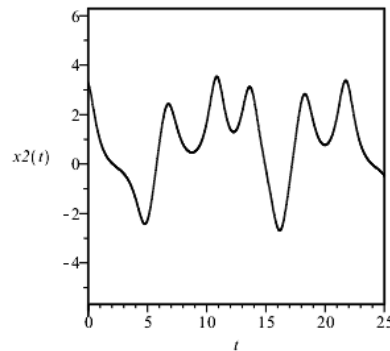


Рис. 12а. График σ̇(t) для z<sub>6π,(1;0;1)</sub><sup>-</sup>(t)

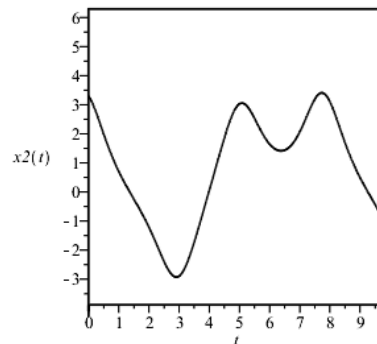


Рис. 12б. График σ̇(t) для z<sub>2π,(1)</sub><sup>+</sup>(t)

При α<sub>1</sub> = 0.162 у системы появляется устойчивый цикл z<sub>6π,(2;1;1)</sub><sup>+</sup>(t) (рис. 13), x<sub>1</sub> = -1.326, x<sub>2</sub> = 3.306, σ = 0.412, который при α<sub>1</sub> = 0.138 переходит в неустойчивый цикл z<sub>6π,(2;1;1)</sub><sup>-</sup>(t) с начальными условиями x<sub>1</sub> = -1.4598, x<sub>2</sub> = 2.8558, σ = 0.412.

Для α<sub>1</sub> = 0.126 получим устойчивый цикл z<sub>4π,(2;1)</sub><sup>+</sup>(t) (рис. 14), x<sub>1</sub> = -1.6696, x<sub>2</sub> = 2.677,



переходящий при  $\alpha_1 = 0.122$  в неустойчивый цикл  $z_{4\pi,(2;1)}^-(t)$ , для которого  $x_1 = -1.6534$ ,  $x_2 = 2.6624$ ,  $\sigma = 0.412$ .

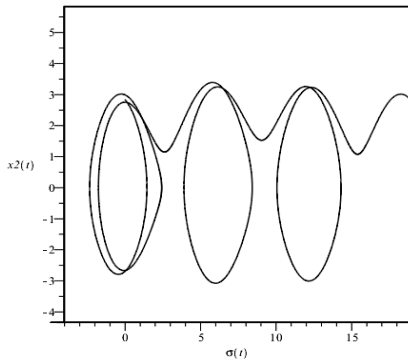


Рис. 13. Цикл  $z_{6\pi,(2;1)}^+(t)$  при  $\alpha_1=0.162$

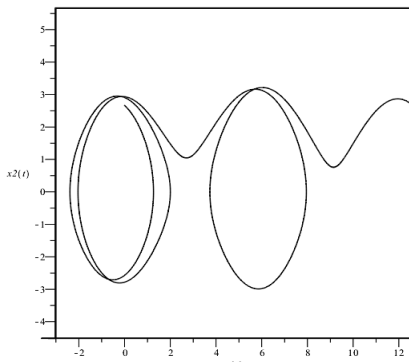


Рис. 14. Цикл  $z_{4\pi,(2;1)}^+(t)$  при  $\alpha_1=0.126$

Уменьшение  $\alpha_1$  до значения 0.103 приводит к появлению неустойчивого цикла  $z_{6\pi,(2;2;1)}^-(t)$  (рис. 15),  $x_1 = -1.85$ ,  $x_2 = 2.496$ ,  $\sigma = 0.412$  трансформирующегося при  $\alpha_1 = 0.1$  в неустойчивый цикл  $z_{6\pi,(2;2;1)}^-(t)$ , для которого  $x_1 = -1.879$ ,  $x_2 = 2.482$ ,  $\sigma = 0.412$ .

При  $\alpha_1 = 0.099$  у системы появляется неустойчивый цикл  $z_{8\pi,(2;2;1;2)}^-(t)$  (рис. 16),  $x_1 = -1.611$ ,  $x_2 = 2.756$ ,  $\sigma = 0.412$ .

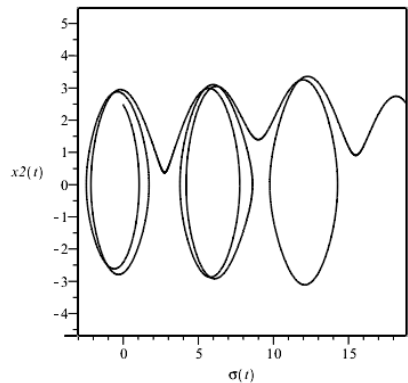


Рис. 15. Цикл  $z_{6\pi,(2;2;1)}^-(t)$  при  $\alpha_1=0.103$

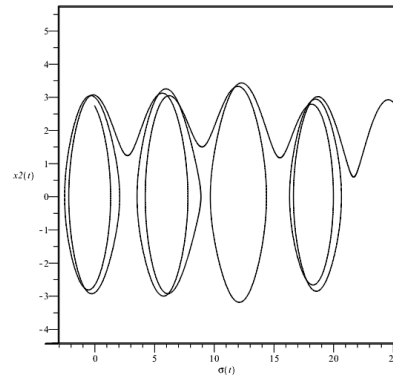


Рис. 16. Цикл  $z_{8\pi,(2;2;1;2)}^-(t)$  при  $\alpha_1=0.099$

Для  $\alpha_1 = 0.095$  существует неустойчивый цикл  $z_{12\pi,(2;2;1;3;1;2)}^-(t)$  с начальными условиями  $x_1 = -1.605$ ,  $x_2 = 2.7454$ ,  $\sigma = 0.412$  (рис. 17).

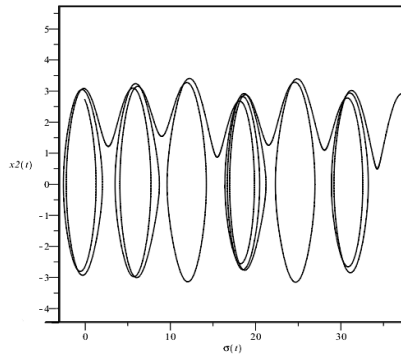


Рис. 17. Цикл  $z_{12\pi,(2;2;1;3;1;2)}^-(t)$  при  $\alpha_1=0.095$

Уменьшение  $\alpha_1$  приводит к появлению следующего сценария колебательных циклов системы  $(I_0)$ . Устойчивый колебательный цикл у системы  $(I_0)$  существует при изменении параметра  $\alpha_1$  от значения 0.305 до 0.115, при  $\alpha_1 = 0.115$  начальные условия цикла определяются значениями  $x_1 = 0.336139$ ,  $x_2 = 2.146741$ ,  $\sigma = 0.412$ , а мультипликаторы принимают вид  $\mu_1 = 1.000083$ ,  $\mu_{2,3} = -0.4695 \pm 0.6063i$  и  $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0052$ . При дальнейшем уменьшении  $\alpha_1$  происходит потеря устойчивости колебательного цикла.

**Заключение.** В работе с использованием вращения векторного поля предложен способ определения колебательных циклов фазовой системы через циклы нефазовой системы. Предложены критерии близости циклов двух систем. Произведено исследование колебательно-вращательных режимов фазовой системы, определена область параметров, гарантирующая устойчивость колебательного цикла фазовой системы. Получен анализ трансформации сложных колебательно-вращательных режимов фазовой системы, сопровождающих скрытую синхронизацию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Шалфеев В.Д.** К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. – 1969. – Т. 12, № 7. – С. 1037–1051.
2. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2013. – 366 с.
3. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 1992. – 368 с.
4. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2017. – № 62. – С. 26–35.
5. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Численно-аналитическое определение циклов первого рода фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 48–56.
6. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1966. – 332 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 97-15-25; e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru

УДК 517.977

# ТЕОРЕМА БОЛЯ – ПЕРРОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

П.М. Симонов

*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

## THEOREM OF BOHL – PERRON ON ASYMPTOTIC PERIODIC SOLUTIONS FOR HYBRID LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

P.M. Simonov

Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных – разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных – функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В. Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно – это система функционально-дифференциальных уравнений, второе – это система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля – Перрона об асимптотических периодических решениях для линейной гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений с последствием.

*Ключевые слова:* теорема Боля – Перрона, асимптотические периодические функции, гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений с последствием, устойчивость, метод модельных уравнений.

### 1. Введение

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [1]–[6]. В статьях [1]–[4] изучена теорема Боля – Перрона для гибридной линейной системы функционально-дифференциальных уравнений с последствием (ГЛСФДУП) в случае экспоненциальной устойчивости. В статьях [5], [6] изучена теорема Боля – Перрона для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости.

Теория устойчивости развивалась до недавних пор главным образом в направлениях, указанных еще Ляпуновым. Попытки приспособить старые идеи к уравнениям с запаздывающим аргументом, и тем более гибридным, не всегда оказывались удачными.

В известных монографиях Х.Л. Массеры и Х.Х. Шеффера [7], М.Г. Крейна [8], Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [9], а также в III главе книги Е.А. Барбашина [10] предложено и развито новое направление в теории устойчи-

The abstract hybrid system of functional differential equations is given. One part of the equation for variable functional differential, according to another of the variables is the difference one, the second part of the equation for variable differential, according to another of the variables is functional differential one. There is a system of two equations with two unknowns. Apply W-method N.V. Azbelev's to two equations. Two model equations were studied: one is a system of functional differential equations, and the second is a system of differential equations. We studied the solutions spaces. Received Bohl – Perron theorem's for the asymptotic periodic solutions for the linear hybrid system of functional differential equations with aftereffect.

*Keywords:* theorem of Bohl – Perron, asymptotic periodic functions, hybrid linear system of functional differential equations with aftereffect, stability, model equations' method.

вости дифференциальных уравнений. В этом направлении свойство устойчивости связывается со свойством разрешимости задачи Коши в некотором специальном функциональном пространстве. Это понятие называется «допустимость пары пространств», разрешимость «задачи о накоплении возмущений», устойчивость относительно «вход – выход». Идея рассматривать явление устойчивости как разрешимость задачи Коши в специальном пространстве (определяющем тип устойчивости) и современная теория линейных функционально-дифференциальных уравнений с последствием (ЛФДУП) приводят к новым понятиям и методам в теории устойчивости.

Более подробно предлагаемый нами подход к задачам устойчивости решений ЛФДУП  $Lx = f$  состоит в следующем. Всюду далее предполагается, что линейное многообразие всех решений уравнения  $Lx = f$  при всех  $f$  из множества  $L$  всех локально суммируемых

функций  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  определяется формулой Коши

$$x(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds + X(t)x(0).$$

Здесь и ниже  $\mathbb{R}^n$  – пространство векторов  $\alpha = \text{col}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  с действительными компонентами и с нормой  $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$ . Пространство  $D$  локально абсолютно непрерывных функций  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Интегральный оператор

$$(Cf)(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds$$

называют оператором Коши, его ядро  $C(t,s)$  – матрицей Коши,  $n \times n$  – матрицу  $X(t)$ , столбцы которой составляют  $n$  линейно независимых решений однородного уравнения  $\mathcal{L}x = 0$ , называют фундаментальной матрицей.

Зафиксируем некоторое модельное ЛФДУП  $\mathcal{L}_0x = z$ , для которого известны фундаментальная матрица  $X_0(t)$  и матрица Коши  $C_0(t,s)$ . Зафиксируем также некоторое подпространство  $B$  пространства  $L$ . Линейное многообразие  $D(\mathcal{L}_0, B)$  всех решений  $x$  модельного уравнения  $\mathcal{L}_0x = z$  при всех  $z \in B$  определяется равенством

$$x(t) = \int_0^t C_0(t,s)z(s)ds + X_0(t)x(0).$$

Таким образом,  $D(\mathcal{L}_0, B) = C_0B + \mathcal{X}_0\mathbb{R}^n$ , где оператор  $\mathcal{X}_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow D$  определен для любого  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  равенством:  $(\mathcal{X}_0\alpha)(t) = X_0(t)\alpha$ . Пространство  $D(\mathcal{L}_0, B)$  будет банаховым, если  $B$  – банахово пространство, причем

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_0, B)} = \|\mathcal{L}_0x\|_B + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Линейное многообразие  $D(L, B)$  всех решений уравнения  $\mathcal{L}x = f$  при всех  $f \in B$  определяется равенством  $D(\mathcal{L}, B) = CB + \mathcal{X}\mathbb{R}^n$ . Для широких классов уравнений  $\mathcal{L}x = f$  многообразия  $D(\mathcal{L}, B)$  при фиксированном  $B$  совпадают. Более того, нормы в этих пространствах эквивалентны. Такие пространства естественно считать совпадающими (равными). Решения этих уравнений обладают в некотором смысле одинаковыми асимптотическими свойствами. В [11], § 2.1, в предположении ограниченности оператора  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}_0, B) \rightarrow B$  показано, в частности, эквивалентности утверждений о совпадении пространств  $D(\mathcal{L}_0, B)$  и  $D(\mathcal{L}, B)$  и существования ограниченного обратного оператора  $(\mathcal{L}C_0)^{-1} : B \rightarrow B$ .

Совпадение пространств  $D(\mathcal{L}_0, B)$  и  $D(\mathcal{L}, B)$  решений модельного уравнения и исследуемого уравнения  $\mathcal{L}x = f$  получило название  $D_0$ -устойчивости (или  $D_0$  – свойства) [11].  $D_0$ -устойчивость при соответствующем выборе модельного уравнения и пространства  $B$  гарантирует устойчивость по Ляпунову (или, соответственно, асимптотическую или экспоненциальную устойчивость).

В основе многих приведенных результатов лежит преобразование уравнения  $\mathcal{L}x = f$  к эквивалентному уравнению вида

$$x = C_0(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + g \tag{1}$$

либо к уравнению вида

$$z = (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})C_0z + \eta. \tag{2}$$

Согласно традициям Пермского семинара преобразование уравнения  $\mathcal{L}x = f$  к уравнению (1) получило название «левый»  $W$ -метод, а преобразование уравнения  $\mathcal{L}x = f$  к уравнению (2) – «правый»  $W$ -метод. В теории линейных операторных уравнений такие преобразования соответственно называются левой и правой регуляризацией (задачи, оператора).

## 2. Основной объект исследований

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами  $y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots$  размерами  $n$ , а через  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  бесконечную матрицу со столбцами  $g(0), g(1), \dots, g(N), \dots$  размерами  $n$ .

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N, N+1)}(t) + \dots$$

Аналогично каждой бесконечной матрице  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N, N+1)}(t) + \dots$$

Символом  $y(t) = y[t]$  обозначим вектор-функцию  $y(t) = y([t])$ ,  $t \in [-1, \infty)$ . Символом  $g[t]$  обозначим вектор-функцию  $g(t) = g([t])$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

Множество таких вектор-функций  $y[\cdot]$  обозначим символом  $\ell_0$ . Множество таких вектор-функций  $g[\cdot]$  обозначим символом  $\ell$ . Обозначим  $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$  при  $t \geq 1$ ,  $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$  при  $t \in [0, 1)$ .

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть пространство  $L$  локально суммируемых  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с полунормами  $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$  для всех  $T > 0$ . Пространство  $D$  локально абсолютно непрерывных функций  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  с полунормами  $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$  для всех  $T > 0$ .

Пусть пространство  $\ell$  бесконечных матриц  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  с полунормами  $\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^T \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}$  для всех  $T \geq 0$ . Пространство  $\ell_0$  бесконечных матриц  $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$  с полунормами  $\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^T \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}$  для всех  $T \geq -1$ .

Операторы  $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \rightarrow \ell$ ,  $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$  предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы  $\text{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  образуют банахово пространство  $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$  (пространство  $\mathbf{D} \subset D$ , пространство  $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$ , пространство  $\mathbf{B} \subset L$ , пространство  $\mathbf{M} \subset \ell$ ,  $\mathbf{B}, \mathbf{M}$  – банаховы пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например  $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=-1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$ , и для уравнения  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$  с линейным ограниченным оператором  $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{M}$  однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Обозначим:  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$ . Тогда (3) записывается в виде  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ .

Предположим, что для любых  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  и  $y(-1) \in \mathbb{R}^n$  однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}^0 x + \mathcal{L}_{12}^0 y &= \dot{x} - F_{11}^0 x - F_{12}^0 y = z, \\ \mathcal{L}_{21}^0 x + \mathcal{L}_{22}^0 y &= \Delta y - F_{21}^0 x - F_{22}^0 y = u, \end{aligned}$$

где операторы  $\mathcal{L}_{11}^0, F_{11}^0 : D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{12}^0, F_{12}^0 : \ell_0 \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21}^0, F_{21}^0 : D \rightarrow \ell$ ,  $\mathcal{L}_{22}^0, F_{22}^0 : \ell_0 \rightarrow \ell$  предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так:  $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{z, u\}$ . Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathcal{W} : L \times \ell \rightarrow D \times \ell_0$  – непрерывный вольтерров оператор Коши для системы,  $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ ,  $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow D \times \ell_0$  – фундаментальная матрица для системы,  $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ .

Будем говорить, что уравнение  $\mathcal{L}_{11}x = z$  с оператором  $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow \mathbf{B}$   $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчиво, если для каждой правой части  $z \in \mathbf{B}$  каждое решение  $x \in D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$  [11].  $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$  – область определения оператора  $\mathcal{L}_{11}$ .

Уравнение  $\mathcal{L}_{11}x = z$  с оператором  $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$ , удовлетворяющему условию выше,  $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно  $\mathbf{B}$ -устойчиво. Уравнение  $\mathcal{L}_{11}x = z$  сильно  $\mathbf{B}$ -устойчиво, если для любого  $z \in \mathbf{B}$  каждое решение  $x$  этого уравнения обладает свойством  $x \in \mathbf{B}$  и  $\dot{x} \in \mathbf{B}$  [11, гл. IV, § 4.6; 13].

Операторы  $\mathcal{L}_{11} : D \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{21} : D \rightarrow \ell$ ,  $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$  рассматриваются как приведения на пары  $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$ ,  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$ ,  $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{M})$ ,  $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$ . Здесь  $\mathbf{D} = D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ . Эти операторы предполагаются линейные вольтерровые и ограниченные.

Обозначим пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\dots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}.$$

Банаховы пространства  $\ell_{\infty 0}$  и  $\ell_{\infty}$  – это примеры пространств типа  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{M}$ .

Предположим, что общее решение уравнения  $\mathcal{L}_{22}y = g$  для  $g \in \mathbf{M}$  принадлежит пространству  $\mathbf{M}_0$  и представляется формулой Коши:

$$\begin{aligned} y[t] &= (\mathcal{Y}_{11}y(-1))[t] + (\mathcal{C}_{22}g)[t] = \\ &= Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^t C_{22}[t,s]g[s]. \end{aligned}$$

### 3. Теоремы Боля – Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [7–10], отмечались явления, которые в терминах  $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора  $\mathcal{L}_{11}$  из  $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно  $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}_1)$ -устойчивость, где  $\mathbf{B}_1$  – некоторое подпространство пространства  $\mathbf{B}$ .

Следуя традиции Пермского семинара [11–13], соответствующие утверждения будем называть теоремами Боля – Перрона. В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства  $\mathbf{V} \subset L$ , вытекающие из их порядковой структуры, которую определим следующим образом. В векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  введем частичную упорядоченность:  $\alpha = \text{col}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \geq 0$ , если  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $\alpha \geq \beta$ , если  $\alpha - \beta \geq 0$ . Через  $|\alpha|$  будем обозначать вектор, определяемый равенством  $|\alpha| = \text{col}\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$ . Будем предполагать, что в пространстве  $\mathbb{R}^n$  зафиксирована норма  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ , обладающая свойством монотонности:  $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}$ , если  $|\alpha| \leq |\beta|$ . В соответствии с порядком в пространстве  $\mathbb{R}^n$  введем отношение порядка в пространстве  $L$ . А именно  $y \geq 0$ , если  $y(t) \geq 0$  почти всюду на  $[0, \infty)$ ;  $y \geq z$ , если  $y - z \geq 0$ . Через  $|y|$  будем обозначать функцию, почти всюду на  $[0, \infty)$  определяемую равенством  $|y|(t) = |y(t)|$ . Относительно банахова пространства  $\mathbf{V} \subset L$  будем предполагать, что норма в пространстве  $\mathbf{V}$  согласована с порядком через условие идеальности: если  $z \in L$ ,  $y \in \mathbf{V}$  и  $|z| \leq |y|$ , то  $z \in \mathbf{V}$  и  $\|z\|_{\mathbf{V}} \leq \|y\|_{\mathbf{V}}$ .

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (банаховых идеальных пространств [14]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве  $\mathbf{V}$  обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства  $\mathbf{V}$  имеет точные грани ( $\mathbf{V}$  –  $K$ -пространство); 3) в пространстве  $\mathbf{V}$  определены «срезки» – операторы умножения на характеристические функции  $\chi_M$  измеримого множества  $M \subset [0, \infty)$ ; 4) вложение  $\mathbf{V} \subset L$  непрерывно.

#### 4. Асимптотическая устойчивость

Введем подмножество  $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}$  всех таких функций  $z \in \mathbf{V}$ , что для каждой функции  $z$  выполняется равенство  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\chi_{[s, \infty)} z\|_{\mathbf{V}} = 0$ . Здесь и ниже  $\chi_M$  – характеристическая функция множества  $M$ . Иначе говоря, пространство  $\mathbf{V}_0$  состоит из всех функций  $z \in \mathbf{V}$ , стремящихся при  $t \rightarrow \infty$  к нулю по метрике пространства  $\mathbf{V}$ , причем нетрудно показать, что  $\mathbf{V}_0$  является замкнутым подпространством пространства  $\mathbf{V}$  и совпадает с замыканием по норме  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$  линейного многообразия всех финитных функций  $z \in \mathbf{V}$ . Пусть далее  $C_0$  – это подпространство

пространства  $C$ , состоящее из всех таких  $x \in C$ , для которых  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ,  $\|x\|_{C_0} = \|x\|_C$ .

Будем предполагать, что для пространства  $\mathbf{V}$  и модельного уравнения  $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$  выполнены условия:

- оператор Коши  $W_{11}$  действует из пространства  $\mathbf{V}_0$  в пространство  $C_0$  и ограничен;
- столбцы фундаментальной матрицы  $U_{11}$  уравнения  $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$  принадлежат пространству  $C_0$ .

Таким образом, имеет место непрерывное вложение  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V}_0) \subset C_0$  и асимптотическая устойчивость модельного уравнения.

**Лемма 1.** Имеет место непрерывное вложение  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V}) \subset C$ .

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства  $\mathbf{V}$  и модельного уравнения,  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V})$ -устойчивость уравнения  $\mathcal{L}_{11} x = z$  гарантирует устойчивость по Ляпунову, а  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V}_0)$ -устойчивость – асимптотическую устойчивость.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение  $\mathcal{L}_{11} x = f$  [11–13].

**Теорема 1.** Пусть уравнение  $\mathcal{L}_{11} x = z$   $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V})$ -устойчиво и оператор  $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L$  действует из пространства  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V}_0)$  в пространство  $\mathbf{V}_0$  и ограничен. Тогда это уравнение  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{V})$ -устойчиво.

Обозначим  $Q_{11} = \mathcal{L}_{11} W_{11}$ . Справедлива лемма.

**Лемма 2.** Пусть линейный ограниченный оператор  $Q_{11} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  вольтерров и  $Q_{11} \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_0$ . Тогда если этот оператор имеет обратный оператор  $Q_{11}^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ , то  $Q_{11}^{-1} \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_0$ .

Введем банахово пространство всех таких функций  $g \in \ell_{\infty}^0 \subset \ell_{\infty}$  ( $g \in \ell_{\infty}^0 \subset \ell_{\infty}^0$ ), что для каждой функции  $g$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}} = 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}^0} = 0).$$

Пусть банахово пространство  $\mathbf{b} \subset \ell$  бесконечных матриц  $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$  с нормой  $\|g\|_{\mathbf{b}}$ . Банахово пространство  $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$  бесконечных матриц  $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$  с нормой  $\|y\|_{\mathbf{b}_0}$ . Причем вложение  $\mathbf{b} \subset \ell$  ( $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ ). Пусть в банаховом пространстве  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}_0$ ) выполнены все предыдущие в п. 3 условия.

Введем подмножество  $\mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}$  всех таких функций  $g \in \mathbf{b}$ , что для каждой функции  $g$  выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\mathbf{b}} = 0$ .

Иначе говоря, пространство  $\mathbf{b}^0$  состоит из всех функций  $g \in \mathbf{b}$ , стремящихся при  $t \rightarrow \infty$  к нулю по метрике пространства  $\mathbf{b}$ , причем нетрудно показать, что  $\mathbf{b}^0$  является замкнутым подпространством пространства  $\mathbf{b}$  и совпадает с замыканием по норме  $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$  линейного многообразия всех финитных функций  $g \in \mathbf{b}$ . Аналогично определяем пространство  $\mathbf{b}_0^0$ .

Будем предполагать, что для пространства  $\mathbf{b}$  и модельного уравнения  $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$  выполнены условия:

- а) оператор Коши  $W_{22}$  действует из пространства  $\mathbf{b}^0$  в пространство  $\ell_{\infty}^0$  и ограничен;
- б) столбцы фундаментальной матрицы  $U_{22}$  уравнения  $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$  принадлежат пространству  $\ell_{\infty}^0$ .

Таким образом, имеет место непрерывное вложение  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0) \subset \ell_{\infty}^0$  и асимптотическая устойчивость второго модельного уравнения.

**Лемма 3.** Имеет место непрерывное вложение  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty}^0$ .

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства  $\mathbf{b}$  и модельного уравнения,  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчивость уравнения  $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$  гарантирует устойчивость по Ляпунову, а  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0)$ -устойчивость – асимптотическую устойчивость.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение  $\mathcal{L}_{22} y = g$  [11–13].

**Теорема 2.** Пусть уравнение  $\mathcal{L}_{22} y = u$   $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчиво и оператор  $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$  действует из пространства  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0)$  в пространство  $\mathbf{b}^0$  и ограничен. Тогда это уравнение  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчиво.

Обозначим  $Q_{22} = \mathcal{L}_{22} W_{22}$ . Справедлива лемма.

**Лемма 4.** Пусть линейный ограниченный оператор  $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$  вольтерров и  $Q_{22} \mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}^0$ . Тогда если этот оператор имеет обратный оператор  $Q_{22}^{-1} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ , то  $Q_{22}^{-1} \mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}^0$ .

### 5. Асимптотически периодические решения

Пусть  $\omega$  – фиксированное положительное число. Определим оператор сдвига  $S^\omega$  равенством  $(S^\omega z)(t) = z(t + \omega)$ . Будем предполагать, что пространство  $\mathbf{B}$  содержит все функции константы,  $S^\omega \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$  и  $\|S^\omega\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} = 1$ . Таким образом, пространство  $\mathbf{B}_0$  не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим

через  $\mathbf{B}_\omega$  подпространство всех асимптотически  $\omega$ -периодических функций:  $z \in \mathbf{B}_\omega$ , если  $(S^\omega z - z) \in \mathbf{B}_0$ . Аналогично определяем пространство  $C_\omega$ , элементами которого являются такие  $x \in C$ , что  $(S^\omega x - x) \in C_0$ . Ниже будем предполагать, что пространство  $\mathbf{B}$  вольтеррово допустимо для модельного уравнения  $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$  и пространство  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$  вложено в пространство  $C_\omega$ . Таким образом,  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчивость уравнения  $\mathcal{L}_{11} x = f$  означает, что если  $f \in \mathbf{B}_\omega$ , то любое решение  $x$  этого уравнения является асимптотической  $\omega$ -периодической функцией.

Обозначим  $[S^\omega, Q_{11}] = S^\omega Q_{11} - Q_{11} S^\omega$ , где  $Q_{11} = \mathcal{L}_{11} W_{11}$ . Пусть модельное уравнение  $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$  удовлетворяет условиям а) и б) из пункта 4.

**Теорема 1.** Пусть уравнение  $\mathcal{L}_{11} x = f$   $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ -устойчиво, а оператор  $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L$  действует из пространства  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$  в пространство  $\mathbf{B}_0$  и ограничен, а также  $[S^\omega, \mathcal{L}_{11} W_{11}] \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_0$ . Тогда это уравнение  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчиво.

Эти утверждения дополняют результаты работ [15], [16]. Доказательства теоремы 1 повторяют доказательство теоремы 1 из пункта 4, если лемму 2 из пункта 4 заменить на следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть оператор  $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  удовлетворяет условиям леммы 2 из пункта 4. Пусть, далее, оператор  $[S^\omega, Q_{11}]$  переводит пространство  $\mathbf{B}$  в пространство  $\mathbf{B}_0$ . Тогда оператор  $Q_{11}$  действует в пространстве  $\mathbf{B}_\omega$ . Если, кроме того, оператор  $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  имеет обратный оператор  $Q_{11}^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ , то оператор  $Q_{11}^{-1}$  действует в пространстве  $\mathbf{B}_\omega$ .

Отметим, что для интегральных уравнений Вольтерра утверждения, аналогичные лемме 1, приведены в обзоре [17, гл. 2, § 2].

Пусть  $\omega \in \mathbb{N}$  – фиксированное число. Будем предполагать, что пространство  $\mathbf{b}$  содержит все функции константы,  $S^\omega \mathbf{b} \subset \mathbf{b}$  и  $\|S^\omega\|_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}} = 1$ . Таким образом, пространство  $\mathbf{b}^0$  не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим через  $\mathbf{b}^\omega$  подпространство всех асимптотически  $\omega$ -периодических функций:  $u \in \mathbf{b}^\omega$ , если  $(S^\omega u - u) \in \mathbf{b}^0$ . Аналогично определяем пространство  $\ell_{\infty}^\omega$ , элементами которого являются такие  $y \in \ell_{\infty}^0$ , что  $(S^\omega y - y) \in \ell_{\infty}^0$ . Ниже будем предполагать, что пространство  $\mathbf{b}$  вольтеррово

допустимо для модельного уравнения  $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$  и пространство  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$  вложено в пространство  $\mathcal{L}_{\infty}^\omega$ . Таким образом,  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивость уравнения  $\mathcal{L}_{22} y = g$  означает, что если  $g \in \mathbf{b}^\omega$ , то любое решение  $y$  этого уравнения является асимптотической  $\omega$ -периодической функцией.

Обозначим  $[S^\omega, Q_{22}] = S^\omega Q_{22} - Q_{22} S^\omega$ , где  $Q_{22} = \mathcal{L}_{22} W_{22}$ . Пусть модельное уравнение  $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$  удовлетворяет условиям а) и б) из пункта 4.

**Теорема 2.** Пусть уравнение  $\mathcal{L}_{22} y = g$   $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчиво, а оператор  $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$  действует из пространства  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0)$  в пространство  $\mathbf{b}^0$  и ограничен, а также  $[S^\omega, \mathcal{L}_{22} W_{22}] \mathbf{b} \subset \mathbf{b}^0$ . Тогда это уравнение  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчиво.

Доказательства теоремы 2 повторяют доказательство теоремы 2 из пункта 4, если лемму 4 из пункта 4 заменить на следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть оператор  $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$  удовлетворяет условиям леммы 4 из пункта 4. Пусть, далее, оператор  $[S^\omega, Q_{22}]$  переводит пространство  $\mathbf{b}$  в пространство  $\mathbf{b}^0$ . Тогда оператор  $Q_{22}$  действует в пространстве  $\mathbf{b}^\omega$ . Если, кроме того, оператор  $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$  имеет обратный оператор  $Q_{22}^{-1} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ , то оператор  $Q_{22}^{-1}$  действует в пространстве  $\mathbf{b}^\omega$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Симонов П.М.** Теорема Боля – Перрона для гибридных линейных систем с последствием // Вестник Пермского университета. Сер. «Математика. Механика. Информатика». – 2016. – № 2 (33). – С. 56–60.
2. **Симонов П.М.** К вопросу о теореме Боля – Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последствием // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 75–81.
3. **Симонов П.М.** Теорема Боля – Перрона для гибридных линейных систем с последствием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры : тр. Междунар. симп. «Дифференциальные уравнения – 2016», г. Пермь, 17–18 мая 2016 г. – М. : ВИНТИ РАН, 2017. – Т. 132. – С. 122–126.
4. **Simonov P.M.** The Bohl – Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect // Journal

of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 230, N 5. – P. 775–781.

**Теорема 3.** Пусть  $\omega \in \mathbb{N}$  – фиксированное число. Операторы  $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L$ ,  $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$  непрерывно действуют из пространства  $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$  и  $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0)$  в пространства  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{b}^0$ , и пусть справедливы включения:  $[S^\omega, \mathcal{L}_{11} W_{11}] \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_0$  и  $[S^\omega, \mathcal{L}_{22} W_{11}] \mathbf{b} \subset \mathbf{b}^0$ . Пусть уравнение  $\mathcal{L}_{11} x = f$   $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ -устойчиво и уравнение  $\mathcal{L}_{22} y = g$   $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчиво. Пусть, далее, уравнение  $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12} \mathcal{L}_{22} \mathcal{L}_{21}) x = f_1$   $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ -устойчиво и оператор  $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$  ограничен, справедливо включение  $[S^\omega, \mathcal{L}_1 W_{11}] \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_0$ . Тогда уравнение  $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$  будет  $D(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_\omega \times \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивым.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 18-01-00332 А.**

5. **Симонов П.М.** Теорема Боля – Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последствием (ГЛФДСП) // Вестник РАЕН. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 55–59.
6. **Симонов П.М.** Теорема Боля – Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения : материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.). – Пермь : ПНИПУ, 2018. – С. 230–235.
7. **Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М. : Мир, 1970. – 456 с.



8. **Крейн М.Г.** О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости // *Успехи мат. наук.* – 1948. – Т. 3, вып. 3 (25). – С. 166–169.
9. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
10. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 224 с.
11. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь : Перм. ун-т, 2001. – 230 с.
12. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. III // *Дифференциальные уравнения.* – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1659–1668.
13. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. IV // *Дифференциальные уравнения.* – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 196–204.
14. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. – 4-е изд., испр. – СПб. : Невский Диалект : БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.
15. **Домошницкий А.И., Драхлин М.Е.** О периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений // *Доклады расширенного засед. семинара Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа.* – Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1988. – Т. 3, № 3. – С. 54–57.
16. **Драхлин М.Е.** Один признак существования асимптотически периодических решений // *Функциально-дифференциальные уравнения : межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т.* – Пермь, 1990. – С. 168–170.
17. **Цалюк З.Б.** Интегральные уравнения Вольтерра // *Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ».* – М. : ВИНТИ, 1977. – Т. 15. – С. 131–198.

Симонов Пётр Михайлович, д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике Пермского государственного национального исследовательского университета.  
614083, г. Пермь, а/я 9.  
Тел.: 8 (342) 239-68-49, 8 (342) 240-30-28; e-mail: simpmp@mail.ru

УДК 517.9

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ МНОГОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА (ИГРОВОЙ ПОДХОД)

М.Т. Терёхин

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

## INVESTIGATION A MATHEMATICAL MODEL OF THE DEVELOPMENT OF DIVER-SITIED ECONOMIC SYSTEM IN CONDITIONS OF CONFLICT (GAMED ACCESS)

М.Т. Teryokhin

Методом теории игр исследуется проблема развития управляемой экономической системы (модель – дифференциальные уравнения), находящейся под влиянием двух конкурирующих фирм. Управляющее воздействие фирмы, эффективность которого оценивается функционалом, заданным на множествах конечно-мерных векторных пространств, осуществляется по принципу обратной связи. В основе исследования лежит теорема о необходимом и достаточном условиях существования седловой точки функционала.

Введено понятие локальной седловой точки, для определения условий ее существования используются знакоопределенные формы.

*Ключевые слова:* производственные фонды, оптимальное управление, функционал, седловая точка, декартово произведение множеств, обратная связь.

**Введение.** Многосекторная экономическая система  $S$  (далее – система  $S$ ), состояние которой в любой момент времени  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  – некоторое число, определяется вектор-функцией  $x(t)$  (объем производственных фондов,  $x(0) = x_0$  – начальный объем фондов), в процессе развития испытывает влияние управляющих воздействий (далее – управления)  $u$ ,  $v$ . Результативность развития системы  $S$  к моменту  $T$  определяется функционалом  $K(x_0)$ . Учитывая зависимость вектор-функции  $x(t)$  от управлений  $u$ ,  $v$  функционал  $K(x_0)$  далее будем записывать в виде  $K(x_0, u, v)$ .

Вполне естественно допустить, что управления  $u$ ,  $v$  могут определяться информацией о текущем состоянии системы  $S$  и, следовательно, иметь соответствующий вид  $u(\cdot, x(\cdot))$ ,  $v(\cdot, x(\cdot))$  (принцип обратной связи).

Пусть  $P$  – множество управлений  $u$ ,  $Q$  – множество управлений  $v$ . Пусть  $u^*(\cdot, x(\cdot)) \in P$ ,  $u^{**}(\cdot, x(\cdot)) \in P$ ,  $v^*(\cdot, x(\cdot)) \in Q$ ,  $v^{**}(\cdot, x(\cdot)) \in Q$  так, что

The problem of the development of the controlled economic system (model-differential equations) under the influence of two competing firms is investigated by the game theory method. The control effect of the company, the effectiveness of which is evaluated by the functional specified on the sets of finite-dimensional vector spaces, is carried out on the basis of feedback. The research is based on the theorem on the necessary and sufficient conditions for the existence of the saddle point of the functional.

The notion of a local saddle point to determine the conditions of its existence used sign-definite form.

*Keywords:* industrial funds, optimization control, functional, saddle point, cartesian product of sets, feedback.

$$\inf_{v \in Q} \sup_{u \in P} K(x_0, u, v) = K(x_0, u^*(\cdot, x(\cdot)), v^*(\cdot, x(\cdot))),$$

$$\sup_{u \in P} \inf_{v \in Q} K(x_0, u, v) = K(x_0, u^{**}(\cdot, x(\cdot)), v^{**}(\cdot, x(\cdot))).$$

Интерес представляет тот случай, когда управления  $u^*(\cdot, x(\cdot))$ ,  $v^*(\cdot, x(\cdot))$ ,  $u^{**}(\cdot, x(\cdot))$ ,  $v^{**}(\cdot, x(\cdot))$  существуют и выполняются равенства

$$\begin{aligned} u^*(\cdot, x(\cdot)) &= u^{**}(\cdot, x(\cdot)), \\ v^*(\cdot, x(\cdot)) &= v^{**}(\cdot, x(\cdot)). \end{aligned} \quad (1)$$

Отметим, что если выполнены равенства (1), то будем говорить, что функционал  $K(x_0, u, v)$  имеет седловую точку  $(u^*(\cdot, x(\cdot)), v^*(\cdot, x(\cdot)))$ , а  $u^*(\cdot, x(\cdot))$ ,  $v^*(\cdot, x(\cdot))$  – оптимальное управление системы  $S$ .

Исследованию проблем теории (антагонистических, дифференциальных) игр посвящено достаточно большое количество работ. Наиболее глубокие исследования содержатся в работах [1–4]. Одной из основных проблем теории игр – определение условий существования седловых точек (ситуаций равновесия).

В настоящей работе условия существования седловых точек функционала используются для исследования математической модели развития экономической системы в условиях конфликта, приводятся некоторые способы нахождения условия существования управлений  $u(t)$ ,  $v(t)$ , удовлетворяющих равенствам (1).

**§1. Седловые точки функционала, заданного на декартовом произведении двух множеств конечно-мерных векторных пространств.**

Предположим, что в результате выполнения операций, определенных функционалом  $K(x_0, u, v)$ , получим, что

$$K(x_0, u(\cdot, x(\cdot)), v(\cdot, x(\cdot))) = F(x_0, \alpha, \beta),$$

$F(x_0, \alpha, \beta)$  – функционал, определенный на декартовом произведении  $A \times B$  некоторых множеств  $A \subset E_n, B \subset E_m, E_s$  –  $s$ -мерное векторное пространство.

Пусть  $K(x_0, u^*(\cdot, x(\cdot)), v^*(\cdot, x(\cdot))) = F(x_0, \alpha^*, \beta^*)$ .

Следовательно,  $(u^*(\cdot, x(\cdot)), v^*(\cdot, x(\cdot)))$  – тогда и только тогда седловая точка функционала  $K(x_0, u, v)$ , когда  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ . Это значит, что определение условий существования оптимального управления системы  $S$  свелось к определению условий существования седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

Убедимся, что

$$\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) \leq \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta).$$

Действительно, при любых  $\alpha \in A, \beta \in B$

$$F(x_0, \alpha, \beta) \leq \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta).$$

Тогда  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) \leq \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$ . Следо-

вательно,

$$\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) \leq \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta).$$

Таким образом, если  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , то

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) &= F(x_0, \alpha^*, \beta^*) = \\ &= \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (1a)$$

и поэтому для любых  $\alpha \in A, \beta \in B$ .

$$F(x_0, \alpha, \beta^*) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta^*) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta). \quad (1b)$$

И наоборот, если выполнены неравенства (1b), то выполнено равенство (1a), то есть точка  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ . Это значит, что точка  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет неравенствам (1b). Поэтому не-

равенства (1b) можно рассматривать, как определение седловой точки, а именно,  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , если она удовлетворяет неравенства (1b) при любых  $\alpha \in A$  и  $\beta \in B$ .

Ставится задача – найти условия выполнения равенства

$$\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) = \inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) \quad (2)$$

и существования седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что  $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  ( $\inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$ ) достигается функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$ , если существует точка  $(\alpha_0, \beta_0) \in A \times B$ , удовлетворяющая равенству  $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) =$

$= F(x_0, \alpha_0, \beta_0)$  ( $\inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha_0, \beta_0)$ ).

**Теорема 1 [2].** Если  $A$  и  $B$  – компактные множества и функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  непрерывен на декартовом произведении  $A \times B$ , то  $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$ ,  $\inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигаются функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$ .

**Доказательство [2].** Из компактности множеств  $A$  и  $B$  следует, что при любых  $\alpha \in A, \beta \in B$   $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$ ,  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигаются функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$  соответственно на множествах  $A$  и  $B$ . Следовательно, соответственно на множествах  $A$  и  $B$  определены функционалы

$$f(\alpha) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta), \quad \varphi(\beta) = \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta).$$

Докажем, что функционал  $f(\alpha)$  непрерывен на множестве  $A$ . По условию теоремы функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  непрерывен, следовательно, равномерно непрерывен на множестве  $A \times B$ . Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $\alpha_1 \in A, \alpha_2 \in A$ , удовлетворяющих неравенству  $\|\alpha_1 - \alpha_2\| < \delta$ , выполняется неравенство

$$\|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)\| < \varepsilon \quad (3)$$

для любых  $\beta \in B$ . Пусть  $\alpha_1, \alpha_2$  – произвольные, но фиксированные точки множества  $A$ , удовлетворяющие неравенству  $\|\alpha_1 - \alpha_2\| < \delta$ . Из того, что  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha_1, \beta)$ ,  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha_2, \beta)$  достигаются функционалами  $F(x_0, \alpha_1, \beta)$ ,  $F(x_0, \alpha_2, \beta)$  на

множестве  $B$ , следует, что существуют  $\beta_1 \in B$ ,  $\beta_2 \in B$  такие, что

$$f(\alpha_1) = F(x_0, \alpha_1, \beta_1) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha_1, \beta),$$

$$f(\alpha_2) = F(x_0, \alpha_2, \beta_2) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha_2, \beta).$$

Из определения  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  следует, что

$$F(x_0, \alpha_1, \beta_1) \leq F(x_0, \alpha_1, \beta_2),$$

$$F(x_0, \alpha_2, \beta_2) \leq F(x_0, \alpha_2, \beta_1). \quad (4)$$

Возможны следующие случаи:

- а)  $0 \leq F(x_0, \alpha_1, \beta_1) - F(x_0, \alpha_2, \beta_2)$ ,
- б)  $0 \leq F(x_0, \alpha_2, \beta_2) - F(x_0, \alpha_1, \beta_1)$ .

В случае а) согласно неравенствам (3), (4) получим, что  $0 \leq f(\alpha_1) - f(\alpha_2) = F(x_0, \alpha_1, \beta_1) - F(x_0, \alpha_2, \beta_2) \leq F(x_0, \alpha_1, \beta_2) - F(x_0, \alpha_2, \beta_2) < \varepsilon$ .

В случае б) с учетом неравенств (3), (4) будем иметь  $0 \leq f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = F(x_0, \alpha_2, \beta_2) - F(x_0, \alpha_1, \beta_1) \leq F(x_0, \alpha_2, \beta_1) - F(x_0, \alpha_1, \beta_1) < \varepsilon$ .

Следовательно,

$$|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| = |F(x_0, \alpha_1, \beta_1) - F(x_0, \alpha_2, \beta_2)| < \varepsilon.$$

Из произвольности  $\alpha_1 \in A$ ,  $\alpha_2 \in A$ , удовлетворяющих неравенству  $\|\alpha_1 - \alpha_2\| < \delta$ , следует непрерывность функционала  $f(\alpha)$  на множестве  $A$ .

В силу компактности множества  $A$   $\sup_{\alpha \in A} f(\alpha) = \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигается функционалом

$f(\alpha)$  в некоторой точке  $\alpha^* \in A$ , то есть  $f(\alpha^*) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha^*, \beta)$ . Учитывая, что

$\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha^*, \beta)$  достигается в точке  $\beta^* \in B$  ( $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha^*, \beta) = F(x_0, \alpha^*, \beta^*)$ ), получим, что

$\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha^*, \beta^*)$ . Это значит,

что  $\sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигается функционалом

$F(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$ .

Аналогично доказывается непрерывность функционала  $\varphi(\beta)$  на множестве  $B$  и то, что  $\inf_{\beta \in B} \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигаются функционалом

$F(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$ . Теорема доказана.

Известна следующая

**Теорема 2.** Пусть функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  определен и непрерывен на декартовом произведении  $A \times B$  компактных множеств  $A, B$ .

Тогда

- 1) если при любом  $\beta \in B$   $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$

достигается функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$  в единст-

венной точке  $\alpha(\beta) \in A$ , то функция  $\alpha(\beta)$  непрерывна на множестве  $B$ ;

- 2) если при любом  $\alpha \in A$   $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$

достигается функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$  в единственной точке  $\beta(\alpha) \in B$ , то функция  $\beta(\alpha)$  непрерывна на множестве  $A$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично.

Пусть  $\beta_0 \in B$  – произвольная, но фиксированная точка,  $\alpha(\beta_0) = \alpha_0$ . Пусть  $(\beta_n)$  – произвольная, но фиксированная последовательность такая, что при любом  $n$   $\beta_n \in B$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_0$ . Тогда в силу компактности множества  $A$  существует подпоследовательность последовательности  $(\alpha_n)$ ,  $\alpha_n = \alpha(\beta_n)$  (для простоты рассуждений будем считать, что такой подпоследовательностью является последовательность  $(\alpha_n)$ ), удовлетворяющая равенству  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha^* \in A$ .

Поскольку функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  непрерывен на множестве  $A \times B$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_0, \alpha_n, \beta_n) = F(x_0, \alpha^*, \beta_0).$$

Докажем, что  $\alpha^* = \alpha_0$ . Пусть вопреки утверждению  $\alpha^* \neq \alpha_0$ . Тогда справедливо неравенство  $F(x_0, \alpha_0, \beta_0) > F(x_0, \alpha^*, \beta_0)$ .

Число  $\varepsilon > 0$  выберем согласно неравенству

$$0 < \varepsilon < F(x_0, \alpha_0, \beta_0) - F(x_0, \alpha^*, \beta_0). \quad (5)$$

В силу непрерывности функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$  окрестность  $\xi$  точки  $\alpha_0$  и окрестность  $\eta$  точки  $\beta_0$  выберем так, чтобы в любой точке  $(\alpha, \beta) \in (\xi \times \eta) \cap (A \times B)$  выполнялось неравенство  $|F(x_0, \alpha, \beta) - F(x_0, \alpha_0, \beta_0)| < \varepsilon$ . Тогда отсюда и из неравенства (5) следует, что в любой точке  $(\alpha, \beta) \in (\xi \times \eta) \cap (A \times B)$  будут выполнены неравенства

$$F(x_0, \alpha^*, \beta_0) < F(x_0, \alpha_0, \beta_0) - \varepsilon < \sup_{\alpha \in \xi \cap A} F(x_0, \alpha, \beta) = \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha^*, \beta_0).$$

Тогда при любом  $n$  согласно неравенствам (6) будут выполнены неравенства

$$F(x_0, \alpha^*, \beta_0) < F(x_0, \alpha_0, \beta_0) - \varepsilon < F(x_0, \alpha_n, \beta_n),$$

что противоречит тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha^*$ . Отсюда и из произвольности последовательности  $(\beta_n)$ , при любом  $n$   $\beta_n \in B$ , и того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_0$ ,

следует непрерывность функции  $\alpha(\beta)$  в точке  $\beta_0$ . Это значит в силу произвольности точки  $\beta_0$ , что функция  $\alpha(\beta)$  непрерывна во множестве  $B$ . Теорема доказана.

Множества  $M$  и  $N$  определим соответственно равенствами

$$\begin{aligned} M &= \{(\alpha(\beta), \beta)\} \in A \times B, \\ N &= \{(\alpha, \beta(\alpha))\} \in A \times B. \end{aligned} \quad (7)$$

$M$  – график функции  $\alpha(\beta)$ ,  $N$  – график функции  $\beta(\alpha)$ .

Справедлива

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для того, чтобы точка  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  была седловой точкой функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$ .

**Доказательство.** Необходимость.

Пусть точка  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$ . Это значит, что  $\alpha^* = \alpha(\beta^*)$ ,  $\beta^* = \beta(\alpha^*)$ . Согласно равенствам  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha(\beta), \beta)$  при любом  $\beta \in B$ ,

$$\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha, \beta(\alpha)) \text{ при любом } \alpha \in A$$

получим, что  $F(x_0, \alpha^*, \beta^*) = \sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta^*) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha^*, \beta)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(x_0, \alpha, \beta^*) &\leq F(x_0, \alpha(\beta^*), \beta^*) = F(x_0, \alpha^*, \beta^*) = \\ &= F(x_0, \alpha^*, \beta(\alpha^*)) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta), \end{aligned}$$

то есть  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

Достаточность. Пусть  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ . Убедимся, что  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$ . Действительно, из того, что  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , следует, что при любых  $\alpha \in A$ ,  $\beta \in B$   $F(x_0, \alpha, \beta^*) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta^*) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta)$ . Следовательно,  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta^*) = F(x_0, \alpha^*, \beta^*)$ , то есть  $\alpha^* = \alpha(\beta^*)$  и поэтому  $(\alpha^*, \beta^*) \in M$ .

Из неравенства  $F(x_0, \alpha^*, \beta^*) \leq F(x_0, \alpha^*, \beta)$  получим, что  $F(x_0, \alpha^*, \beta^*) = \inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha^*, \beta)$ . Это значит, что  $F(x_0, \alpha^*, \beta^*) = F(x_0, \alpha^*, \beta(\alpha^*))$ , то есть  $(\alpha^*, \beta^*) \in N$  и, следовательно,  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Отметим, что при доказательстве теоремы 3 не использовались условия 1), 2) теоремы 2. Поэтому в условиях теоремы 3 каждая из функций  $\alpha = \alpha(\beta)$ ,  $\beta = \beta(\alpha)$  может быть как однозначной, так и многозначной.

Пусть  $R(Q)$  – множество однозначных функций, определенных отображением  $\beta \rightarrow \alpha(\beta)$  ( $\alpha \rightarrow \beta(\alpha)$ ) на множестве  $B(A)$ . Тогда согласно теореме 3 любая точка пересечений графиков функций  $\alpha = \xi(\beta) \in R$ ,  $\beta = \eta(\alpha) \in Q$  является седловой точкой функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

Отметим также, что теоремы 1, 2 и 3 остаются справедливыми и в том случае, когда функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  определен и непрерывен в ограниченном множестве  $D \subset X \times Y$ , где  $X$  и  $Y$  – некоторые векторы пространства, в которых любое ограниченное замкнутое множество является компактным. В этом случае множества  $A \in X$ ,  $B \in Y$  выберем так, чтобы для любого  $\alpha \in A$  существовало  $\beta \in B$ , при котором точка  $(\alpha, \beta) \in D$ , и для любого  $\beta \in B$  существовало  $\alpha \in A$ , при котором точка  $(\alpha, \beta) \in D$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Предположим, что функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  определен и непрерывен на декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A = \{\alpha \in E_1 : |\alpha| \leq a\}$ ,  $B = \{\beta \in E_1 : |\beta| \leq b\}$ ,  $a, b$  – некоторые положительные числа, и при любом  $\beta \in B$   $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигается в единственной точке  $\alpha(\beta) \in A$ , при любом  $\alpha \in A$   $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  достигается в единственной точке  $\beta(\alpha) \in B$ . Тогда согласно теореме 2 функция  $\alpha(\beta)$  непрерывна на множестве  $B$ , функция  $\beta(\alpha)$  непрерывна на множестве  $A$ . Следовательно, графики функции  $\beta(\alpha)$ ,  $\alpha(\beta)$  на множестве  $A \times B$  пересекаются в некоторой точке  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$  (теорема 3). Следовательно,  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

2. Предположим, что функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  определен и непрерывен на декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A = \{\alpha \in E_1 : |\alpha| \leq a\}$ ,  $B = \{\beta \in E_1 : |\beta| \leq b\}$ . Пусть функции  $\alpha = \xi^0(\beta)$ ,  $\alpha = \eta^0(\beta)$  определены и непрерывны на множестве  $B$ , функции  $\beta = \xi_0(\alpha)$ ,  $\beta = \eta_0(\alpha)$  определены и непрерывны на множестве  $A$  и такие, что при любом  $\beta \in B$   $\xi^0(\beta) \in A$ ,  $\eta^0(\beta) \in A$ ,

$\xi^0(\beta) \leq \eta^0(\beta)$ ,  $\xi_0(\alpha) \in B$ ,  $\eta_0(\alpha) \in B$ ,  
 $\xi_0(\alpha) \leq \eta_0(\alpha)$  при любом  $\alpha \in A$ .

Символами  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_\beta$  обозначим множества, определенные соответственно равенствами  $\Gamma_\alpha = \{(\alpha, \beta) \in A \times B : \xi^0(\beta) \leq \eta^0(\beta)\}$ ,  $\Gamma_\beta = \{(\alpha, \beta) \in A \times B : \xi_0(\alpha) \leq \eta_0(\alpha)\}$ , обладающие свойствами: при любом  $\beta \in B$  существует единственная точка  $\alpha(\beta)$ , удовлетворяющая включению  $(\alpha(\beta), \beta) \in \Gamma_\alpha$  и равенству  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha(\beta), \beta)$ , при любом  $\alpha \in A$  существует единственная точка  $\beta(\alpha)$  такая, что  $(\alpha, \beta(\alpha)) \in \Gamma_\beta$  и  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) = F(x_0, \alpha, \beta(\alpha))$ . Очевидно, что множество  $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subset A \times B$ .

Согласно теореме 2 в силу компактности множеств  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_\beta$  функции  $\alpha(\beta)$ ,  $\beta(\alpha)$  непрерывны соответственно на множествах  $B$ ,  $A$ . Следовательно, графики функций  $\alpha(\beta)$  и  $\beta(\alpha)$  пересекаются в некоторой точке  $(\alpha^*, \beta^*) \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ . Это значит, что  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$  (теорема 3),  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

Отметим, что в общем случае может существовать не одно множество  $\Gamma_\alpha$  и не одно множество  $\Gamma_\beta$ . В этих условиях число седловых точек функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  не менее числа пар  $(\Gamma_\alpha^*, \Gamma_\beta^*)$ ,  $\Gamma_\alpha^* \cap \Gamma_\beta^* \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_\alpha^* \in \{\Gamma_\alpha\}$ ,  $\Gamma_\beta^* \in \{\Gamma_\beta\}$ , где  $\{\Gamma_\alpha\}$  – совокупность множеств  $\Gamma_\alpha$ ,  $\{\Gamma_\beta\}$  – совокупность множеств  $\Gamma_\beta$ .

3. Предположим, что функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  определен и непрерывен на декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A$ ,  $B$  таких, что  $A = \{\alpha \in E_1 : |\alpha| \leq a\}$ ,  $B = \{\beta \in E_2 : 0 \leq \beta_i \leq b, i \in \{1, 2\}\}$  и при любом  $\beta \in B$  достигает  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta)$

в единственной точке  $\alpha(\beta) \in A$ , при любом  $\alpha \in A$  достигает  $\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta)$  в единственной точке

$\beta(\alpha) \in B$ . Убедимся, что множество  $A \times B$  содержит седловую точку функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ . Действительно, график функции  $\alpha(\beta)$ , область определения которой является множеством  $B$ , – поверхность, расположенная между плоскостями  $\alpha = -a$ ,  $\alpha = a$ , график функции  $\beta(\alpha)$  имеет общие точки как с плоскостью  $\alpha = -a$ , так и с плоскостью  $\alpha = a$ . В силу непрерывности функций

$\alpha(\beta)$ ,  $\beta(\alpha)$  (теорема 2) их графики пересекаются в некоторой точке  $(\alpha^*, \beta^*) \in M \cap N$  (теорема 3). Следовательно,  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ .

**Пример 1.** Предположим, что функционал  $F(\alpha, \beta)$  на декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A = \{\alpha \in E_n : 0 \leq \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i, i = \overline{1, n}\}$ ,  $B = \{\beta \in E_n : 0 \leq \underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \overline{\beta}_i, i = \overline{1, n}\}$ ,  $\underline{\alpha}_i$ ,  $\overline{\alpha}_i$ ,  $\underline{\beta}_i$ ,  $\overline{\beta}_i$  – постоянные числа, определен равенством  $F(\alpha, \beta) = (\alpha \cdot \beta)$  в котором  $(\alpha \cdot \beta)$  – скалярное произведение векторов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ . Убедимся, что единственной седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$  является точка  $(\alpha^*, \beta^*)$ ,  $\alpha^* = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)$ ,  $\beta^* = (\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \dots, \underline{\beta}_n)$ . Действительно, при любом  $\beta \in B$   $\sup_{\alpha \in A} F(\alpha, \beta) = F(\alpha^*, \beta)$ . Следовательно, на множестве  $B$  определена функция  $\alpha(\beta) = \alpha^*$ . Тогда согласно равенствам (7) множество  $M$  определено равенством  $M = \{\alpha(\beta), \beta\} = \{\alpha^*, \beta\}$ ,  $\beta \in B$ .

При любом  $\alpha \in A$   $\inf_{\beta \in B} F(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta^*)$ . Это значит, что на множестве  $A$  задана функция  $\beta(\alpha) = \beta^*$ . Согласно равенствам (7) множество  $N$  определено равенством  $N = \{\alpha, \beta(\alpha)\} = \{\alpha, \beta^*\}$ . Из определений множеств  $M$  и  $N$  следует, что  $(\alpha^*, \beta^*)$  – единственная точка множества  $M \cap N$  ( $M \cap N = (\alpha^*, \beta^*)$ ). На основании теоремы 3 приходим к выводу о том, что  $(\alpha^*, \beta^*)$  – единственная седловая точка функционала  $F(\alpha, \beta)$ , значение которого в седловой точке – число  $F(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha^* \cdot \beta^*)$ .

**Пример 2.** Предположим, что функционал  $F(\alpha, \beta)$  на декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A = \{\alpha \in E_1 : 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ ,  $B = \{\beta \in E_1 : 0 \leq \beta \leq 2\pi\}$  определен равенством  $F(\alpha, \beta) = |\sin(\alpha + \beta)| \cdot |\cos(\alpha - 2\beta)| + 1$ .

При любом  $\beta \in B$   $\sup_{\alpha \in A} F(\alpha, \beta)$  достигается функционалом  $F(\alpha, \beta)$  на значениях  $\alpha$ , удовлетворяющих равенствам  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$ ,  $\alpha - 2\beta = 0$ ,  $\alpha - 2\beta = \pi$ ,  $\alpha - 2\beta = 2\pi$ . Следовательно, отображение  $\beta \rightarrow \alpha(\beta)$ , удовлетворяю-

шее равенству  $\sup_{\alpha \in A} F(\alpha, \beta) = F(\alpha(\beta), \beta)$ , определяет следующее множество  $R$  однозначных функций  $R = \left\{ \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta, \alpha = \frac{3}{2}\pi - \beta, \alpha = 2\beta, \alpha = 2\beta + \pi, \alpha = 2\beta + 2\pi \right\}$ .

При любом  $\alpha \in A$   $\inf_{\beta \in B} F(\alpha, \beta)$  достигается функционалом  $F(\alpha, \beta)$  на значениях  $\beta$  удовлетворяющих равенствам  $\alpha + \beta = 0, \alpha + \beta = \pi, \alpha + \beta = 2\pi, \alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2}, \alpha - 2\beta = \frac{3}{2}\pi$ . Следовательно, отображение  $\alpha \rightarrow \beta(\alpha)$ , удовлетворяющее равенству  $\inf_{\beta \in B} F(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta(\alpha))$ , определяет следующее множество  $Q$  однозначных функций  $Q = \left\{ \beta = -\alpha, \beta = -\alpha + \pi, \beta = -\alpha + 2\pi, \beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}\pi \right\}$ .

Непосредственным вычислением устанавливаем, что множества  $M$  и  $N$ , определенные равенствами (7) таковы, что

$$M \cap N = \left\{ \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right), \left( \frac{7}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi \right), \left( \frac{3}{2}\pi, 0 \right), (0, 0), \left( \frac{3}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi \right), \left( \frac{4}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \right), (\pi, 0), \left( \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3} \right), (2\pi, 0) \right\} \subset A \times B.$$

Тогда на основании теоремы 3 каждая из точек множества  $M \cap N$  является седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$ , его значения в этих точках определяются равенством  $F(\alpha, \beta) = 1$ .

## §2. Условия существования седловой точки функционала, имеющего непрерывные частные производные.

Пусть функционал  $F(\alpha, \beta)$  определен в декартовом произведении  $A \times B$  множеств  $A \subset E_n, B \subset E_m$  и имеет в этом множестве частные производные по координатам векторов  $\alpha, \beta$ . Символами  $F_\alpha^{(k)}(\alpha, \beta), F_\beta^{(r)}(\alpha, \beta)$  обозначим любую частную производную порядка  $k$ , любую частную производную порядка  $r$  функционала  $F(\alpha, \beta)$  по координатам соответственно векторов  $\alpha, \beta$ .

Далее будем предполагать, что функционал  $F(\alpha, \beta)$  на множестве  $A \times B$  имеет непрерывные частные производные  $F_\alpha^{(k)}(\alpha, \beta), k = \overline{1, p}, F_\beta^{(r)}(\alpha, \beta), r = \overline{1, q}$ . Из определения седловой точки следует, что если хотя бы по одной из координат вектора  $\alpha$   $F_\alpha^i(\alpha, \beta) \neq 0$  или хотя бы по одной из координат вектора  $\beta$   $F_\beta^j(\alpha, \beta) \neq 0$ , то  $(\alpha, \beta)$  не является седловой точкой функционала

$F(\alpha, \beta)$ . Следовательно, для того, чтобы точка  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  была седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$ , необходимо, чтобы все частные производные первого порядка были равны нулю, то есть  $F_\alpha^i(\alpha^*, \beta^*) = 0, F_\beta^j(\alpha^*, \beta^*) = 0$ .

Пусть точка  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  такова, что при любом  $k = \overline{1, p-1}$   $F_\alpha^{(k)}(\alpha^*, \beta^*) = 0$ , при любом  $r = \overline{1, q-1}$   $F_\beta^{(r)}(\alpha^*, \beta^*) = 0$ . Найдем условия, при выполнении которых  $(\alpha^*, \beta^*)$  будет седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$ .

Заметим, что если  $p$  – нечетное число или хотя бы одна из производных  $F_\alpha^{(p)}(\alpha^*, \beta^*) \neq 0$  ( $q$  – нечетное число или хотя бы одна из производных  $F_\beta^{(q)}(\alpha^*, \beta^*) \neq 0$ ), то  $(\alpha^*, \beta^*)$  не является седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$  (согласно определению седловой точки).

Следовательно, полагая  $p$  и  $q$  четными числами и представляя функционал  $F(\alpha, \beta)$  в окрестности точки  $\alpha^*$ , функционал  $F(\alpha^*, \beta)$  в окрестности точки  $\beta^*$  по формуле Тейлора, получим, что

$$F(\alpha, \beta^*) = F(\alpha^*, \beta^*) + Y_p(\Delta\alpha) + o(\|\Delta\alpha\|^p), \quad (8)$$

$$F(\alpha^*, \beta) = F(\alpha^*, \beta^*) + Z_q(\Delta\beta) + o(\|\Delta\beta\|^q), \quad (9)$$

где  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha^*, \Delta\beta = \beta - \beta^*, Y_p(\Delta\alpha)$  – форма порядка  $p$  относительно  $\Delta\alpha, Z_q(\Delta\beta)$  – форма порядка  $q$  относительно  $\Delta\beta, o(\|\Delta\alpha\|^p), o(\|\Delta\beta\|^q)$  – бесконечно малые относительно соответственно  $\|\Delta\alpha\|^p, \|\Delta\beta\|^q$ .

**Определение 2.** Точку  $(\alpha^*, \beta^*)$  назовем локальной седловой точкой функционала  $F(\alpha, \beta)$ , если существует окрестность  $\gamma_1$  точки  $\alpha^*$  и окрестность  $\gamma_2$  точки  $\beta^*$  такие, что при любых  $\alpha \in A \cap \gamma_1$  и любых  $\beta \in B \cap \gamma_2$  выполняются неравенства

$$F(\alpha, \beta^*) \leq F(\alpha^*, \beta^*) \leq F(\alpha^*, \beta).$$

Из приведенных рассуждений следует

**Теорема 4.** Пусть функционал  $F(\alpha, \beta)$  во множестве  $A \times B$  имеет непрерывные частные производные по координатам вектора  $\alpha$  до порядка  $p$  включительно и по координатам вектора  $\beta$  до порядка  $q$  включительно.

Тогда для того, чтобы точка  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  была локальной седловой точкой функ-

ционала  $F(\alpha, \beta)$ , необходимо, чтобы  $F'_\alpha(\alpha^*, \beta^*) = 0$ ,  $F'_\beta(\alpha^*, \beta^*) = 0$ , и достаточно, чтобы выполнялись равенства (8), (9), в которых  $Y_p(\Delta\alpha)$  – определено отрицательная форма,  $Z_p(\Delta\beta)$  – определено положительная форма.

Отметим, что если выполнены условия теоремы 4 и

$$F(\alpha, \beta^*) = F(\alpha^*, \beta^*) + Y_p(\Delta\alpha),$$

$$F(\alpha^*, \beta) = F(\alpha^*, \beta^*) + Z_q(\Delta\beta),$$

то  $(\alpha^*, \beta^*)$  – седловая точка функционала  $F(\alpha, \beta)$ .

### §3. Существование оптимального управления системы S.

Предположим, что развитие системы  $S$  определяется моделью вида [5]

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u + B_2(t)v + f(t), \quad (10)$$

в котором  $A_1(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  – соответственно  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times k$  – матрицы,  $u$ ,  $v$  – управляющие параметры,  $f(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция,  $t \in [0, T]$ .

Решение  $x(t)$  модели (10) – вектор-объем производственных фондов системы  $S$  в момент времени  $t \in [0, T]$ . Результативность развития системы  $S$  к моменту  $T$  определяется функционалом  $K(x_0, u, v)$ ,  $x_0 = x(0)$ .

Будем предполагать, что матрицы  $A_1(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ , вектор-функция  $f(t)$  определены и непрерывны на сегменте  $[0, T]$ . На развитие системы  $S$  оказывают влияние две фирмы, которые обозначим соответственно символами  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , находящиеся в конфликте, фирма  $\Phi_1$  посредством управления  $u$ , фирма  $\Phi_2$  – посредством управления  $v$ .

Управляющие воздействия фирм на развитие системы  $S$  осуществляются следующим образом: фирма  $\Phi_1$  оказывает влияние на систему  $S$  с целью увеличения ее дохода (увеличение значения функционала  $K(x_0, u, v)$ ), фирма  $\Phi_2$ , наоборот, оказывает влияние на систему  $S$  с целью уменьшения ее дохода (уменьшения значения функционала  $K(x_0, u, v)$ ).

Управляющие воздействия определяются с учетом информации о состоянии  $x(t)$  системы  $S$  в любой момент времени  $t \in [0, T]$  (по принципу обратной связи).

Рассмотрим следующие способы выбора управляющих воздействий.

4. Предположим, что при любом  $t \in [0, T]$

$$u(t) = S_1(t)x(t) + R_1(t)\alpha,$$

$$v(t) = S_2(t)x(t) + R_2(t)\beta, \quad (11)$$

где  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $R_1(t)$ ,  $R_2(t)$  – непрерывные на сегменте  $[0, T]$  матрицы размерности соответственно  $m \times n$ ,  $k \times n$ ,  $m \times \bar{p}$ ,  $k \times \bar{q}$ ,  $\alpha \in A \subset E_{\bar{p}}$ ,  $\beta \in B \subset E_{\bar{q}}$ . Тогда система (11) примет вид

$$\dot{x} = A_1^*(t)x + B_1^*(t)\alpha + B_2^*(t)\beta + f(t), \quad (12)$$

где  $A_1^*(t) = A_1(t) + B_1(t)S_1(t) + B_2(t)S_2(t)$ ,  $B_1^*(t) = B_1(t)R_1(t)$ ,  $B_2^*(t) = B_2(t)R_2(t)$ .

**Замечание 2.** В ряде случаев может оказаться полезным элементы матриц в равенствах (11) выбрать в виде линейной комбинации известных функций с неизвестными коэффициентами (в частности постоянными).

5. Предположим, что воздействия фирм на развитие системы  $S$  ищутся в ограниченных множествах  $\{u(t)\}$ ,  $\{v(t)\}$  конечномерных, кусочно-постоянных вектор-функций, определенных на сегменте  $[0, T]$  следующим образом [3]. Для построения вектор-функции  $u(t) \in \{u(t)\}$  сегмент  $[0, T]$  произвольным, но фиксированным образом разбивается на  $\xi$  частей точками  $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_\xi = T$ , при любом  $i = \overline{0, \xi - 1}$  на множестве  $[t'_i, t'_{i+1})$   $j$ -я координата вектор-функции  $u(t)$  определяется равенством  $u_j(t) = \mu_{ij}$ , на сегменте  $[t'_{\xi-1}, T]$  – равенством  $u_j(t) = \mu_{\xi-1j}$ ,  $\mu_{ij}$  – число.

Для построения вектор-функции  $v(t) \in \{v(t)\}$  сегмент  $[0, T]$  произвольным, но фиксированным образом разбивается на  $\eta$  частей точками  $0 = t''_0 < t''_1 < \dots < t''_\eta = T$ , при любом  $i = \overline{0, \eta - 1}$  на множестве  $[t''_i, t''_{i+1})$   $l$ -я координата вектор-функции  $v(t)$  определяется равенством  $v_l = v_{il}$ , на сегменте  $[t''_{\eta-1}, T]$  – равенством  $v_l = v_{\eta-l}$ ,  $v_{il}$  – число (возможно, в некоторых случаях возникнет необходимость выполнить разбиение сегмента  $[0, T]$  на конечное число частей отдельно для каждой координаты вектор-функций  $u(t)$ ,  $v(t)$ ).

Вектор, координатами которого являются числа  $\mu_{ij}$ , обозначим буквой  $\alpha$ , вектор координатами которого являются числа  $v_{il}$ , – буквой  $\beta$ . Множество всех векторов  $\alpha$  обозначим буквой  $A$ , множество всех векторов  $\beta$  – буквой  $B$ .

Из способов выбора управлений  $u(t)$ ,  $v(t)$ , рассмотренных в пунктах 4, 5, следует, что  $A$ ,  $B$  – множества соответствующих конечномерных векторных пространств.



Поскольку модель (10) линейная, то при любых выборах вектор-функций  $u(t)$ ,  $v(t)$ , рассмотренных в пунктах 4, 5, модель (10) имеет единственное, непрерывное решение, определенное начальным значением  $x_0 \in E_n$  и существующее на сегменте  $[0, T]$ .

Пусть  $x(t)$ ,  $x(0) = x_0$  – решение модели (10) при одном из рассмотренных выше способов выбора управляющих воздействий  $u(t)$ ,  $v(t)$ . Тогда, подставляя это решение в функционал  $K(x_0, u, v)$  и выполняя действия, им определенные, получим, что  $K(x_0, u, v) = F(x_0, \alpha, \beta)$ , где  $F(x_0, \alpha, \beta)$  – функционал, определенный на декартовом произведении  $A \times B$ .

Таким образом, приходим к выводу: если функционал  $F(x_0, \alpha, \beta)$  имеет (локальную) седловую точку, то (локальную) седловую точку имеет и функционал  $K(x_0, u, v)$ , то есть если  $(\alpha^*, \beta^*)$  – (локальная) седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , то  $(u^*(t), v^*(t))$  – (локальная) седловая точка функционала  $K(x_0, u, v)$ , а  $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$  – оптимальное управление (в малом) системы  $S$  ( $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$  – оптимальное управление в малом, если  $(u^*(t), v^*(t))$  – локальная седловая точка;  $(u^*(t), v^*(t))$  – локальная седловая точка функционала  $K(x_0, u, v)$ , если  $(\alpha^*, \beta^*)$  – локальная седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ ). В частности, если управление  $u(t)$ ,  $v(t)$  определено согласно пункту 4, то

$$\begin{aligned} u^*(t) &= S_1(t)x^*(t) + R_1(t)\alpha^*, \\ v^*(t) &= S_2(t)x^*(t) + R_2(t)\beta^*, \end{aligned}$$

где  $x^*(t)$  – решение модели (12).

Следовательно, задача нахождения условий существования оптимального управления (в малом) системы  $S$  свелась к задаче нахождения условий существования (локальной) седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , определенного в декартовом произведении двух множеств конечномерных векторных пространств.

Способы нахождения (локальных) седловых точек функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  рассмотрены в §1, §2.

Итак, пусть развитие системы  $S$  (модель (10)) происходит под влиянием управлений  $u$ ,  $v$ , определенных в одном из пунктов 4, 5. Решение  $x(t)$  ( $x(0) = x_0$ ) модели (10) – вектор-объем производственных фондов,  $x(T)$  – общий доход системы  $S$ . После выполнения необходимых платежей (налоги, коммунальные услуги и другие обязательные платежи) оставшаяся часть дохода ис-

пользуется для обеспечения уровня потребления [6], определенного функционалом  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , другая часть, определенная функционалом накопления  $G(x_0, \alpha, \beta)$ , направляется на замену изношенного и приобретения нового оборудования, на социальные и другие благотворительные нужды.

Пусть  $D \subset E_n$  – замкнутое, ограниченное множество и пусть при любом  $x_0 \in D$  точка  $(\alpha, \beta) \in A \times B$  удовлетворяет какому-либо условию существования (локальной) седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  (см., например, теорему 4). Это значит, что на множестве  $D$  определены функции  $\alpha(x_0)$ ,  $\beta(x_0)$ , а функционал  $G(x_0, \alpha, \beta)$  примет вид  $G(x_0, \alpha(x_0), \beta(x_0))$ . Тогда, учитывая «заинтересованность» системы  $S$ , в качестве точки  $(\alpha, \beta)$  для исследования может быть взята точка  $(\alpha(x_0^*), \beta(x_0^*))$ , в которой  $x_0^*$  определяется согласно равенству

$$\sup_{x_0 \in D} G(x_0, \alpha(x_0), \beta(x_0)) = G(x_0, \alpha(x_0^*), \beta(x_0^*)).$$

**Пример 3.** Предположим, что развитие системы  $S$  определяется моделью

$$\dot{x}_1 = 4u + 2v, \quad \dot{x}_2 = 4u + 4v, \quad (13)$$

в которой  $u$ ,  $v$  – управления, заданные на сегменте  $[0, 2]$  следующими равенствами (принцип обратной связи):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1), \\ \alpha & \text{при } t \in [1, 2], \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha \in A = \{\alpha \in E_1 : 1 \leq \alpha \leq 2\},$$

$$v(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } t \in [0, 1), \\ \beta & \text{при } t \in [1, 2], \end{cases} \quad (15)$$

$$\beta \in B = \{\beta \in E_1 : 2 \leq \beta \leq 3\}.$$

Функционалы  $F(x_0, \alpha, \beta)$ ,  $G(x_0, \alpha, \beta)$  определены соответственно равенствами

$$\begin{aligned} F(x_0, \alpha, \beta) &= \int_0^2 (2x_1(t) + x_2(t)) dt, \\ G(x_0, \alpha, \beta) &= \int_0^2 (4x_1(t) + 2x_2(t)) dt, \end{aligned}$$

множество  $D$  – равенством  $D = \{x_0 \in E_1 : 1 \leq x_{01} \leq 4, 2 \leq x_{02} \leq 5\}$ ,  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ .

Ставится задача: найти точку  $(\alpha^*, \beta^*) \in A \times B$  такую, что определенное ею согласно равенствам (14), (15) управление  $(u^*(t), v^*(t))$  являлось бы оптимальным и решение  $x(\cdot, x_0^*, u^*(\cdot), v^*(\cdot))$  доставляло бы максимальное значение функционалу  $G(x_0, \alpha, \beta)$  на множестве решений  $\{x(\cdot, x_0, u(\cdot), v(\cdot))\}$ ,  $x_0 \in D$ .

На сегменте  $[0, 2]$  решение модели (13) запишется так: на множестве  $[0, 1]$

$$x_1(t) = x_{01} + 6t, \quad x_1(1-0) = x_{01} + 6, \quad x_1(0) = x_{01}, \\ x_2(t) = x_{02} + 12t, \quad x_2(1-0) = x_{02} + 12, \quad x_2(0) = x_{02},$$

на сегменте  $[1, 2]$

$$x_1(t) = x_{01} + 6 + 2\alpha(t-1) + 2\beta(t-1), \\ x_2(t) = x_{02} + 12 + 4\alpha(t-1) + 4\beta(t-1).$$

Непосредственным вычислением устанавливаем, что  $F(x_0, \alpha, \beta) = 36 + 4x_{01} + 2x_{02} + 4\alpha + 4\beta$ . Отсюда  $\sup_{\alpha \in A} F(x_0, \alpha, \beta) = 44 + 4x_{01} + 2x_{02} + 4\beta$ ,

$$\inf_{\beta \in B} F(x_0, \alpha, \beta) = 44 + 4x_{01} + 2x_{02} + 4\alpha.$$

Следовательно, на множестве  $B$  определена функция  $\beta \rightarrow \alpha(\beta) = 2$ , на множестве  $A$  – функция  $\alpha \rightarrow \beta(\alpha) = 2$ ,  $\{\alpha(\beta), \beta\} \cap \{\alpha, \beta(\alpha)\} = (2, 2)$ . По теореме 3  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , значение которого в этой точке  $F(x_0, 2, 2) = 52 + 4x_{01} + 2x_{02}$ .

Решение модели (13), определенное на сегменте  $[0, 2]$  с учетом седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$ , запишется в виде: на множестве  $[0, 1]$

$$x_1(t) = x_{01} + 6t, \quad x_1(1-0) = x_{01} + 6, \\ x_2(t) = x_{02} + 12t, \quad x_2(1-0) = x_{02} + 12,$$

на множестве  $[1, 2]$

$$x_1(t) = x_{01} + 6 + 8(t-1), \\ x_2(t) = x_{02} + 12 + 16(t-1).$$

Тогда с учетом седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  получим, что  $G(x_0, 2, 2) = 104 + 8x_{01} + 4x_{02}$ . Следовательно,  $\sup_{x_0 \in D} G(x_0, 2, 2) = 156$  достигается функционалом  $G(x_0, 2, 2)$  на решении  $x(t)$  модели (13), определенным начальным условием  $x_0 = (x_{01}, x_{02}) = (4, 5)$ .

Таким образом, поставленная задача решена: искомой седловой точкой функционала  $F(x_0, \alpha, \beta)$  является точка  $(2, 2)$ , оптимальным управлением системы  $S$  является

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1], \\ 2 & \text{при } t \in [1, 2], \end{cases}$$

$$v^*(t) = 2 \text{ при } t \in [1, 2],$$

решением модели (13), доставляющим максимальное значение функционалу  $G(x_0, 2, 2)$ , является  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , определенное равенствами

$$x_1(t) = 4 + 6t, \quad x_2(t) = 5 + 12t,$$

на множестве  $[0, 1]$ ,

$$x_1(t) = 10 + 8(t-1), \quad x_2(t) = 17 + 16(t-1),$$

на сегменте  $[1, 2]$ .

**Пример 4.** Предположим, что развитие системы  $S$  определяется моделью

$$\dot{x}_1 = v_1, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = v_2, \quad (16)$$

в которой управления  $u, v_1, v_2$  определяются на сегменте  $[0, 1]$  равенствами

$$v_1 = x_1 + t\beta_1, \quad u = x_2 - t\alpha, \quad v_2 = x_3 + 2t\beta_2. \quad (17)$$

Уровень потребления определим функционалом

$$F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = \int_0^1 (3x_1^2(t) + 4x_1(t)x_2(t) - 2x_2^2(t) +$$

$+ 2x_3^2(t))dt$ , функционал накопления – равенством

$$G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = \int_0^1 (2x_1(t) + 4x_2(t) + x_3(t))dt, \text{ множе-}$$

ство  $D$  – равенством  $D = \{x_0 \in E_3 : 1 \leq x_{01} \leq 2, 1 \leq x_{02} \leq 2, 1 \leq x_{03} \leq 2\}$ ,  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ .

Ставится задача: найти такое начальное значение  $x_0 \in D$ , при котором решение  $x(t)$  модели (16) доставляло бы максимальное значение функционалу  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  на множестве  $D$ , а управление системы  $S$ , определенное равенствами (17), было бы оптимальным.

Модель (16), согласно равенствам (17), примет вид  $\dot{x}_1 = x_1 + t\beta_1, \dot{x}_2 = x_2 - t\alpha, \dot{x}_3 = x_3 + 2t\beta_2$ , решением которой является

$$x_1(t) = x_{01}e^t + [e^t - (t+1)]\beta_1, \\ x_2(t) = x_{02}e^t - [e^t - (t+1)]\alpha, \quad (18) \\ x_3(t) = x_{03}e^t + [e^t - (t+1)]\beta_2,$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_3(0) = x_{03}.$$

Подставляя решение модели (18) в функционал  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , получим, что

$$F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = d + p(2x_{03} + 3x_{01})\beta_1 + \\ + p(4x_{01} + 3x_{03})\beta_2 - p2x_{02}\alpha + 3q\beta_1^2 + \\ + 8q\beta_1\beta_2 - 2q\alpha^2 + 8q\beta_2^2, \quad (19)$$

$$\text{где } d = \frac{1}{2}(e^2 - 1)(3x_{01}^2 + 4x_{01}x_{03} - 2x_{02}^2 + 2x_{03}^2), \quad p = \\ = (e^2 + 2e - 1), \quad q = \frac{1}{2}((e^2 - 1) - 2e + \frac{7}{3}).$$

Согласно теореме 4 для того, чтобы точка  $(\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$  была седловой точкой функционала  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  необходимо, чтобы в точке  $(\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$   $F'_\alpha(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = 0, F'_{\beta_1}(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = 0, F'_{\beta_2}(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = 0$ .

Вычислением устанавливаем, что

$$F'_{\beta_1}(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = p(3x_{01} + 2x_{03}) + 6q\beta_1 + 8q\beta_2,$$

$$F'_{\beta_2}(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = p(4x_{01} + 2x_{03}) + 8q\beta_1 + 16q\beta_2,$$

$$F'_\alpha(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = -2px_{02} - 4q\alpha.$$

Следовательно, частные производные обращаются в ноль в точке с координатами  $\alpha^* = -\frac{p}{2q}x_{02}$ ,  $\beta_1^* = -\frac{p}{2q}(x_{01} + x_{03})$ ,  $\beta_2^* = \frac{p}{8q}x_{03}$ .

Убедимся, что  $(\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ . Действительно, учитывая, что  $F''_{q_1} = 6q$ ,  $F''_{q_1q_2} = 8q$ ,  $F''_{q_2} = 16q$ ,  $F''_{\alpha} = -4q$ , получим согласно формуле Тейлора, что

$$F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = F(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) + \frac{1}{2}(6q\Delta\beta_1^2 + 16q \cdot \Delta\beta_1\Delta\beta_2 + 16q\Delta\beta_2^2 - 4q\Delta\alpha^2) = F(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) + \frac{q}{3} \cdot (3\Delta\beta_1 + 4\Delta\beta_2)^2 + \frac{8q}{3}\Delta\beta_2^2 - 4q\Delta\alpha^2.$$

Следовательно, при любых  $\alpha \neq \alpha^*$ ,  $\beta_1 \neq \beta_1^*$ ,  $\beta_2 \neq \beta_2^*$  будут выполнены неравенства

$$F(x_0, \alpha, \beta_1^*, \beta_2^*) < F(x_0, \alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) < F(x_0, \alpha^*, \beta_1, \beta_2),$$

то есть  $(\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$  – седловая точка функционала  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  при любом  $x_0 \in D$ .

Вычислением устанавливаем, что функционал  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  на решении  $x(t)$  модели (16) с учетом седловой точки функционала  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  может быть представлен в виде

$$G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) = a_1x_{01} + a_2x_{02} + a_3x_{03},$$

где  $a_1, a_2, a_3$  – постоянные положительные числа. Следовательно, наибольшее значение на множестве  $D$  функционал  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  примет в точке  $x_0 = (2, 2, 2)$ , приближенно равное  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2) \cong 44,90$ .

Таким образом, поставленная в примере задача решена: начальным значением  $x_0 \in D$ , при котором решение  $x(t)$  модели (16) доставляет максимальное значение функционалу  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , является точка  $x_0 = (2, 2, 2)$ ; седловой точкой функционала  $F(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  является точка

$$(\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = \left(-\frac{p}{q}, -\frac{2p}{q}, \frac{p}{4q}\right);$$

решением  $x(t)$  модели (16), доставляющим максимальное значение функционалу  $G(x_0, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , – вектор-функция  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , определенная равенствами (18), в которых  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) = (\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$ , оптимальным управлением систем  $S$  – управление  $(u, v_1, v_2)$ , заданное равенствами (17), в которых  $(\alpha, \beta_1, \beta_2) = (\alpha^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x(t)$  – решение модели (16), определенное выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бесконечные антагонистические игры : сб. пер. / под ред. Н.Н. Воробьева. – М. : Физматгиз. – 1963. – 504 с.
2. Давыдов Э.Г. Методы и модели теории антагонистических игр. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – 207 с.
3. Красовкий Н.Н., Субботин А.Н. Позиционные дифференциальные игры. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. – Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1977. – 224 с.
5. Терехин М.Т., Белова Ю.Е. Математическая модель развития многосекторной экономической системы в условиях внешних воздействий // Вестник РАЕН. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 77–83.
6. Максимов В.П. О некоторых обобщениях дифференциальных уравнений, краевых задач и их приложениях к задачам экономики // Вестник Пермского государственного технического университета. Функционально-дифференциальные уравнения. – 1997. – № 4. – С. 103–120.

Терехин Михаил Тихонович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7(4912) 97-15-25; e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция тематического номера «Дифференциальные уравнения» журнала «Вестник Российской академии естественных наук» принимает для опубликования статьи по актуальным проблемам теории дифференциальных уравнений и ее приложениям, оформленные в **текстовом редакторе** Microsoft Word по приведенному ниже образцу с использованием следующих настроек.

**1. Параметры страницы.** Поля: все по 25 мм. Размер бумаги: А4. До колонтитулов – по 1,27 мм.  
**2. Вставка/номера страниц:** внизу снаружи, начиная с первой страницы.  
**3. Вставка/разрыв.** После шапки статьи, аннотации, ключевых слов и перед литературой – новый раздел на текущей странице.

**4. Формат/колонки.** Для аннотации, текста статьи и литературы – 2 колонки: промежуток 0,5 см.  
**5. Формат/абзац.** Выравнивание: по ширине. Уровень: основной. Отступ первой строки основного текста: 0,75 см. Интервал: перед – 0 пт, после – 0 пт, междустрочный – одинарный.

**4. Формат/шрифт.** Шрифт: Times New Roman. Размер: 10 пт – для основного текста статьи, 8 пт – для аннотации, ключевых слов, подписей под рисунками, сведений о грантах, сведений об авторах, для заголовка статьи: на русском языке – 15 пт, на английском языке – 14 пт. Начертание: полужирным – УДК, ФИО автора(ов), слова «определение», «задача», «теорема», «лемма», «доказательство», «аксиома», «пример», названия разделов статьи, сведения о грантах, ФИО авторов в списке литературы; курсивом – места работы авторов статьи, фраза «ключевые слова», обозначение рисунка (типа «*Рис. 1*»). Прописными: заголовок статьи, слово «литература».

**5. Сервис/язык.** Расстановка переносов: автоматическая, без переносов в словах из прописных букв.

**Шапка статьи** включает: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, места их работы, аннотацию и ключевые слова на русском и на английском языках.

В тексте оставить **пустые строки**: по одной перед: индексом УДК, названием статьи на русском языке, списками авторов на русском и на английском языках, ключевыми словами; по две перед: названием статьи на английском языке, аннотацией, текстом статьи, сведениями о грантах, литературой.

**Рисунки, схемы и чертежи** допустимо выполнять в любом графическом редакторе, кроме встроенного в Microsoft Word, сохранять с расширением wmf, tif, gif, jpg, bmp, rcx и затем вставлять в текст статьи с помощью меню Вставка/рисунок/из файла. Допустимо использовать отсканированные изображения, импортировать объекты MathCAD, Microsoft Excel, Maple и др. Если на графике несколько линий, то для их изображения необходимо использовать только черный цвет и различное начертание (сплошная линия, пунктирная линия и т.д.). Все импортированные объекты (рисунки и др.) должны быть высланы в адрес редакции серии вместе с электронной копией статьи, каждый объект – в отдельном файле.

**Формулы** следует набирать, используя **объект Microsoft Equations 3.0**. Формат/интервал: междустрочный интервал и расстояние между строками – 150 %, между столбцами – 50–100 %, высота верхнего индекса – 45 %, глубина нижнего индекса и высота верхнего предела – 25 %. Стиль/определить: переменная – наклонный; матрица-вектор – полужирный; прописные греческие и символ – шрифт Symbol; строчные греческие – шрифт Symbol, наклонный; остальные стили – шрифт Times New Roman, стиль «текст» – английский (США). Размер/определить: обычный и мелкий символ – 10 пт, крупный индекс – 8 пт, мелкий индекс – 6 пт, крупный символ – 15 пт. **Нумеровать** рекомендуется только **формулы**, цитируемые в статье. Формулы выравниваются по центру строки, их номера – по правому краю. Кроме того, в отдельную строку рекомендуется выносить лишь формулы большого размера.

**Сведения о грантах** указываются после основного текста перед списком литературы.

**Литература** оформляется по приведенному ниже образцу. Источники нумеруются по порядку упоминания в тексте статьи.

После списка литературы обязательно указываются **сведения о первом авторе статьи**.

**Статьи представляются в редакцию** тематического номера «Дифференциальные уравнения» по e-mail: [m.terehin@rsu.edu.ru](mailto:m.terehin@rsu.edu.ru) и на бумаге формата А4 по адресу: 390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46, Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, кафедра математики и методики преподавания математических дисциплин (статья должна быть подписана авторами).

К статьям должны быть приложены **сведения о каждом авторе**: фамилия, имя, отчество; ученая степень, ученое звание; занимаемая должность; адрес для переписки (с указанием почтового индекса); телефон; e-mail (обязательно).

**Образец оформления текста** статьи приведен ниже.

УДК 517.91

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. Петров

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

## LIMIT CYCLES OF THE SYSTEM OF SECOND ORDER

A.V. Petrov

Рассматривается система дифференциальных уравнений с матрицей линейного приближения, имеющей определитель, равный нулю. Получены условия существования нескольких предельных циклов второго рода. Рассмотрен пример системы с синусоидальной нелинейностью, имеющей три предельных цикла второго рода.

*Ключевые слова:* система дифференциальных уравнений, предельный цикл второго рода.

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c^T x + \rho\varphi(\sigma), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $b, c, x \in R^2$ ,  $\rho \leq 0$ ,  $\det A = 0$ ,  $\varphi(\sigma)$  –  $\Delta$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция.

Система вида (1) изучалась в работе [1]...

**Теорема 1.** Пусть для системы (1)...

**Доказательство.** Рассмотрим функции...

The system of differential equations with the matrix of linear approach having a determinant equal zero is considered. Conditions of existence of several limiting cycles of the second sort are received. The example of system with the sinusoidal nonlinearity having three limiting cycles of the second sort is considered.

*Keywords:* system differential equations, limiting cycle of the second sort.

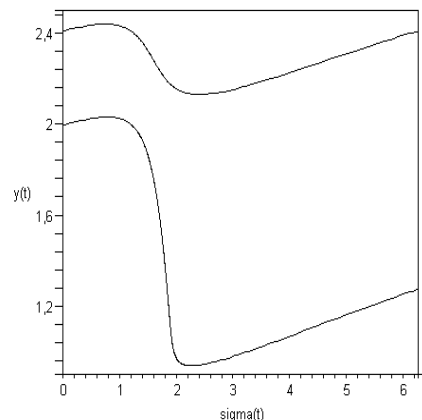


Рис. 1. Область значений  $\sigma, \gamma$ , определяющих предельные циклы второго рода

## ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
2. Айзенгендлер П.Г., Оборин Л.П. Об устойчивых особых периодических решениях неавтономных уравнений // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПИ. – Рязань, 1978. – № 11. – С. 3–15.
3. Усачёв Ю.В. Рождение инвариантного тора из положения равновесия в случае выполнения условий соизмеримости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1434–1436.
4. Захаров А.В. Устойчивость периодических решений дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2005. – № 1. – С. 54–88. – Режим доступа: <http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>

Петров Алексей Вениаминович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.  
Тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: a.petrov@rsu.edu.ru

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**АЛЕКСЕЕВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ** — д. г.-м. н., профессор кафедры палеонтологии геологического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова, зав. лабораторией пропалеонтологии ПИИ им. А.А. Борисяка РАН, главный редактор журнала «Вестник РАЕН»

**ГЛАЗКО ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ** — д. с.-х. н., профессор, иностранный член РАН, зав. Центром нанобиотехнологии Российского государственного аграрного университета – Московской сельскохозяйственной академии им. К.А. Тимирязева, заместитель главного редактора журнала «Вестник РАЕН»

**ГОРБАЧЕВ ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор Московского государственного университета печати, почетный вице-президент РАЕН, заместитель главного редактора журнала «Вестник РАЕН»

**ПОРОТНИКОВА МИЛЕНА ВСЕВОЛОДОВНА** — ответственный секретарь журнала «Вестник РАЕН»

**АЛЕКСЕЕВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ** — д. и. н., профессор Университета управления правительства Москвы, почетный работник высшего профессионального образования

**АНТОНОВ АНТОН ВАЛЕРЬЕВИЧ** — д. э. н., профессор, начальник планово-экономического управления РАЕН

**АРЕНС ВИКТОР ЖАНОВИЧ** — д. т. н., профессор, Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, Лауреат Государственной премии ТССР, почетный вице-президент РАЕН

**БАТЛЕР РОСС РАСТИ** — профессор, вице-президент Университета Долины штата Юта (США), директор Института Юта-Россия (США)

**БУРАК ПЕТР ИОСИФОВИЧ** — д. э. н., профессор, директор Института региональных экономических исследований, вице-президент РАЕН

**ВОЛКОВ ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ** — д. филос. н., профессор, зав. кафедрой социологии, политологии и права, директор Института по переподготовке и повышению квалификации Южного федерального университета, Заслуженный деятель науки РФ

**ГРИБОВ ЛЕВ АЛЕКСАНДРОВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН, почетный вице-президент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ

**ЕПИФАНЦЕВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ** — д. соц. н., действительный государственный советник II класса, профессор Южного федерального университета

**ЖДАНОВ МИХАИЛ СЕМЕНОВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор, г. н. с. лаборатории электромагнитных методов геофизических исследований Института геоэлектроманнитных исследований Объединенного института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, профессор университета Солт-Лейк-Сити (США)

**ЗОЛОТАРЕВ ВЛАДИМИР АНТОНОВИЧ** — д. ю. н., д. и. н., профессор, действительный государственный советник РФ I класса, вице-президент РАЕН

**ИВАНИЦКАЯ ЛИДА ВЛАДИМИРОВНА** — к. т. н., Первый вице-президент – Главный ученый секретарь РАЕН

**КАЗАРЯН СУРИК БАХШИЕВИЧ** — д. ю. н., Судья третьего ранга Квалификационного класса Республики Армения, Гос. Советник юстиции, президент Высшего арбитражного консультативного совета ЗА, президент Американского научного центра РАЕН

**МАГОМЕДОВ ШАМИЛЬ МАГОМЕДОВИЧ** — д. э. н., профессор, зам. директора Института региональных экономических исследований

**ПАНИН АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ** — д. вет. н., профессор, академик РАН, директор Всероссийского государственного центра качества и стандартизации лекарственных средств для животных и кормов

**ПИСЬМЕНСКИЙ ГЕННАДИЙ ИВАНОВИЧ** — д. воен. н., д. и. н., профессор, проректор НОУ ВПО «Современная гуманитарная академия»

**САВЕЛЬЕВ ВИКТОР НИКОЛАЕВИЧ** — д. филос. н., профессор кафедры мировой и национальной экономики Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ)

**СМИРНОВ АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ** — д. и. н., профессор Дипломатической академии МИД России, Чрезвычайный и полномочный посланник Российской Федерации

**ТЕРЁХИН МИХАИЛ ТИХОНОВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа Рязанского государственного университета им. С.А. Есенина

**УТЯМЫШЕВ ИЛЬДАР РУСТАМОВИЧ** — д. т. н., ученый секретарь отделения «Научные основы регулирования естественных монополий»

**ХАЧАТРЯН КАРЕН ГЕВОРГОВИЧ** — к. т. н., д-р горного дела, специалист по географическим системам управления (GIS) департамента государственных работ графства Лос-Анджелес (США), член Союза писателей Армении, вице-президент и ученый секретарь Американского научного центра РАЕН, гл. редактор журнала «Знапок»

**ЧЕНЬ ЦЗЯНЬПИН** — д. т. н., профессор, директор научно-исследовательского центра «Земли, ресурсов и высоких технологий» Китайского геологического университета (г. Пекин), начальник головной лаборатории и профессионального комитета математической геологии и геоинформации Китайского геологического общества. Лауреат пяти премий научно-технологического прогресса министерства геологии и минеральных ресурсов (Китай)

**ЧЕРЕШКИН ДМИТРИЙ СЕМЕНОВИЧ** — д. т. н., профессор зав. лабораторией Информатизации и информационной безопасности Института системного анализа РАН

**ЧЖАО ПЕНДА** — д. т. н., профессор Китайского геологического университета (г. Пекин), действительный член Китайской академии наук, председатель международного комитета по геологическим данным от азиатского региона (Китай)

**ШАХВЕРДИЕВ АЗИЗ ХАНОВИЧ** — д. т. н., генеральный директор НП «Институт системных исследований процессов нефтегазодобычи», вице-президент РАЕН

**ШЕВЧЕНКО ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ** — д. м. н., профессор, академик РАН, Заслуженный врач РФ, Заслуженный деятель науки РФ, президент Национального медико-хирургического центра им. Н.И. Пирогова

**ЯННАКОПУЛОС ПАНАЙОТИС** — профессор кафедры компьютерных систем, член управляющего совета Пирейского университета прикладных наук, вице-президент Европейских программ ПУПИ, член совета Национального греческого информационного центра (Греция)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**КУЗНЕЦОВ ОЛЕГ ЛЕОНИДОВИЧ** — президент РАЕН, д. т. н., профессор, президент Международного университета природы, общества и человека «Дубна», Лауреат государственной премии СССР, Заслуженный деятель науки и техники РФ, Лауреат Премии правительства РФ в области науки и техники

**ГЕЙХМАН ИСААК ЛЬВОВИЧ** — д. т. н., профессор, вице-президент РАЕН, президент Ассоциации строительных компаний «Росзарубежстрой», Заслуженный деятель науки РФ

**КЕРВАЛИШВИЛИ ПААТА ДЖАМЛЕТОВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор Института прикладной физики Грузинского технического университета, президент Грузинской АЕН

**КОЗЛОВСКИЙ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ** — д. т. н., профессор, Вице-президент РАЕН, зав. кафедрой Российского государственного геологоразведочного университета им. Серго Орджоникидзе, лауреат Ленинской премии, дважды лауреат премии Правительства РФ

**МЕЛУА АРКАДИЙ ИВАНОВИЧ** — д. филос. н., профессор, генеральный директор научного издательства «Гуманитарика»

**НИКИТИН АЛЬБЕРТ НИКОЛАЕВИЧ** — д. т. н., профессор, генеральный директор Московского института ноосферных технологий, Лауреат государственной премии РФ

**НОВИКОВ ВАСИЛИЙ СЕМЕНОВИЧ** — д.м.н., профессор, Лауреат Государственной премии РФ, Заслуженный деятель науки РФ, вице-президент РАЕН

**РАХМАНИН ЮРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ** — д. м. н., профессор, академик РАН, директор НИИ экологии человека и гигиены окружающей среды им. А.Н. Сысина МЗ России, вице-президент РАЕН

**СТЕПАШИН СЕРГЕЙ ВАДИМОВИЧ** — д. ю. н., профессор, государственный советник юстиции РФ, председатель наблюдательного совета государственной корпорации «Фонд содействия реформированию жилищно-коммунального хозяйства»

**ТЫМИНСКИЙ ВЛАДИМИР ГЕОРГИЕВИЧ** — к. г.-м. н., профессор, президент Европейской академии естественных наук (ФРГ, Ганновер), почетный Главный ученый секретарь РАЕН

**ФУРСЕЙ ГЕОРГИЙ НИКОЛАЕВИЧ** — д. ф.-м. н., профессор Государственного университета телекоммуникаций, зав. кафедрой физики, директор Центра электрофизического проблем поверхности, почетный вице-президент РАЕН

**ЧИЛИНГАН ДЖОРДЖ Б.** — профессор, иностранный член РАН, руководитель научного центра РАЕН, США

**АЛЕКСЕЕВ ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ** — к. т. н., начальник научно-организационного отдела РАЕН, зав. редакцией Вестника РАЕН

**Заместитель выпускающего редактора тематического номера  
«Дифференциальные уравнения»  
С.С. Мамонов**

**Редактор тематического номера  
«Дифференциальные уравнения»  
Н.В. Смурова**

**Технический редактор тематического номера  
«Дифференциальные уравнения»  
В.В. Абрамов**

**Ответственный секретарь тематического номера  
«Дифференциальные уравнения»  
З.С. Свирина**

Подписано в печать 20.06.2018

Бумага офсетная

Формат 60×84/8

Гарнитура Times

Печать трафаретная

Усл. п.л. 9,5

Уч.-изд. л. 7,25

Поз. № 25

Тираж 500 экз.

Заказ № 143

**Российская академия естественных наук**

Редакция тематического номера «Дифференциальные уравнения»  
«Вестник Российской академии естественных наук»

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46

Отпечатано в редакционно-издательском центре  
Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина  
390000, г. Рязань, ул. Ленина, 20а

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

РЕДКОЛЛЕГИЯ «ВЕСТНИКА РАЕН»  
ПРОСИТ ВАС ПОДПИСАТЬСЯ НА ЖУРНАЛ

ПО ВОПРОСАМ ПОДПИСКИ ОБРАЩАЙТЕСЬ В ПРЕЗИДИУМ РАЕН  
ИНФОРМАЦИЯ ПО ТЕЛ. (495) 954-73-05

**18311** Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ  
на II полугодие 2018 года

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ  
ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Журнал входит в перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук по следующим группам специальностей:

- 25.00.00 Науки о Земле;
- 14.03.00 Медико-биологические науки;
- 08.00.00 Экономические науки.

119002 МОСКВА,  
пер. Сивцев Вражек, 29/16

ТЕЛ.: +7 · (495) · 954 · 54 · 86  
ФАКС: +7 · (495) · 954 · 7305

vestnikraen@yandex.ru

www.raen.info



журнал включен  
в Российский индекс  
научного цитирования



ИЗДАНИЕ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ  
ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК